Dérivation

I) Notions de limite d'une fonction en 0 et de taux d'accroissement :

► notion de limite en 0 d'une fonction :

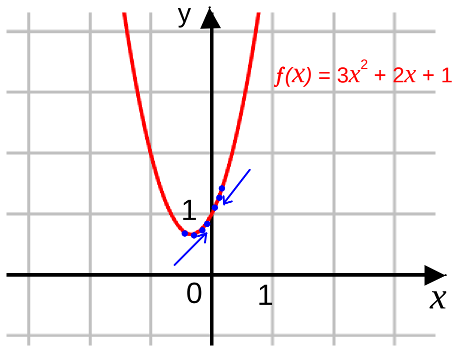
Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0 ou bornée par 0 comme]0 ; +∞[,]–∞ ; 0[,]a ; 0[ou]0 ; a[avec a ∈ ℝ.

Etudier la limite de la fonction f quand x tend vers 0 revient à observer le comportement de la fonction (les valeurs de $f(x)$) quand x se rapproche de 0.

Ex :

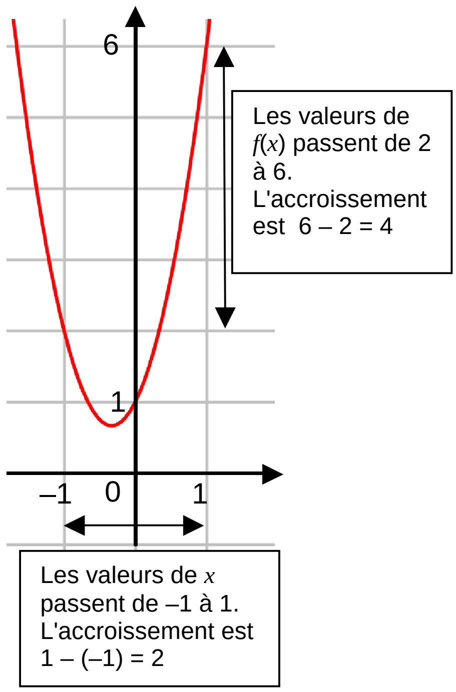
en observant la courbe représentative de cette fonction f, on peut conjecturer (supposer) que la limite de la fonction f quand x tend vers 0 est le nombre 1.

On écrit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ ou $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 + 2x + 1 = 1$



► notion de taux d'accroissement d'une fonction :

Observons la courbe représentative de la fonction précédente f.



- le taux d'accroissement de la fonction entre –1 et 1 est égal à 2.

La différence entre l'abscisse d'arrivée et celle de départ est: (1 – (–1)) est 2

La différence de leurs images respectives est :
$f(1) - f(-1) = 6 - 2 = 4$.

Le taux d'accroissement est le rapport de la différence des images par la différence des abscisses donc $\frac{4}{2}$ soit 2.

- le taux d'accroissement de la fonction entre 0 et 1 est égal à 5:
La différence des abscisses (1 – 0) est 1 et celle des images (6 – 1) est de 5.
taux d'accroissement de la fonction entre 0 et 1 : $\frac{5}{1} = 5$

- le taux d'accroissement de la fonction entre –1 et 0 est égal à –1:
La différence des abscisses (0 – (–1)) est 1 et celle des images (1 – 2) est – 1.
taux d'accroissement de la fonction entre –1 et 0 : $\frac{-1}{1} = -1$

attention, un taux d'accroissement peut être négatif !!

II) Nombre dérivé d'une fonction en un point - Tangente :

définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I; a et a + h sont deux nombres réels appartenant à I avec $h \neq 0$.

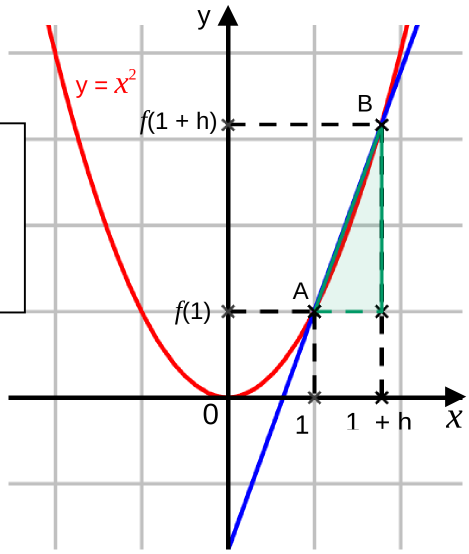
Le taux d'accroissement de f entre a et a + h est le rapport $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ex :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Soit un nombre réel h tel que $h \neq 0$.
Le taux d'accroissement de f entre 1 et 1 + h est égal à :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h$$

A et B sont les points de la courbe f d'abscisses respectives 1 et 1 + h.
Le taux d'accroissement de la courbe entre 1 et 1+h est le coefficient directeur de la droite (AB) !

$$\frac{y(B) - y(A)}{x(B) - x(A)} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$



définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I; a et a + h sont deux nombres réels appartenant à I avec $h \neq 0$.

► f est dérivable en a revient à dire que :
lorsque h tend vers 0, alors le taux d'accroissement de la fonction entre a et a+ h tend vers un nombre réel ℓ

► ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$

► on peut écrire $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Soit un nombre réel h tel que $h \neq 0$.
Voyons si la fonction est dérivable en 1.

Le taux d'accroissement de f entre 1 et 1 + h est égal à : 2 + h
Quand h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers 2.

quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0; 2 + h prend des valeurs de plus en plus proches de 2 !

h	0,8	0,7	....	0,04	0,03	....	0,0004	....	0,00005
2 + h	2,8	2,7	....	2,04	2,03	.....	2,0004	......	2,00005

La fonction est donc dérivable en 1 puisqu'il existe un nombre réel, limite du taux d'accroissement de la fonction entre 1 et 1 + h.

On a donc $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$

2 est le nombre dérivé de la fonction en 1 !

définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en un réel a appartenant à I. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par le point A et de coefficient directeur $f\,'(\text{a})$

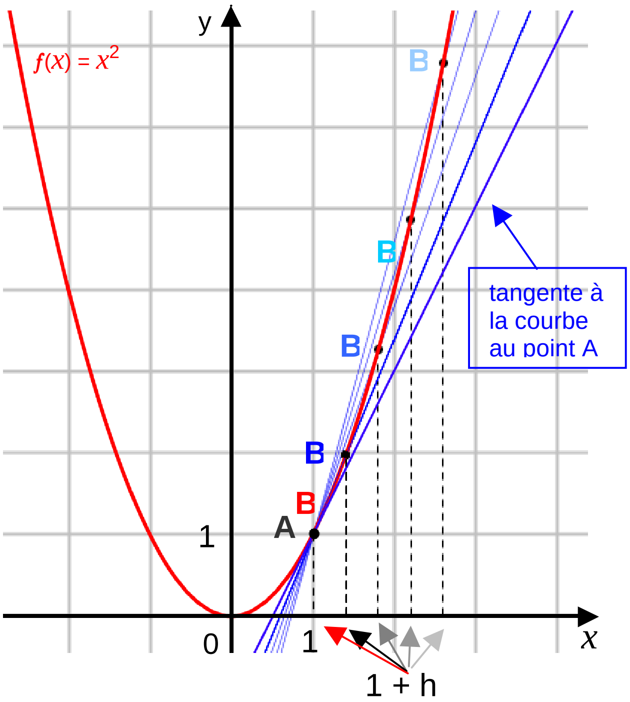
► **interprétation géométrique**

Reprenons l'exemple précédent :
Soit h un nombre réel différent de 0.
B est le point de la courbe d'abscisse 1 + h.
A est le point de la courbe d'abscisse 1.

La droite (AB) a pour coefficient directeur le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 1 + h.
Quand h tend vers 0, B se rapproche de A.
Imaginons la position limite atteinte quand B se confond avec A.

La droite n'aurait alors plus qu'un seul point en commun avec la courbe. La droite est la tangente à la courbe au point A.

La tangente à la courbe au point A a pour coefficient directeur la limite du taux d'accroissement de f entre 1 et 1 + h quand h tend vers 0, c'est à dire $f\,'(1)$.



III) Fonctions dérivées :

cela signifie que la fonction est dérivable en tout nombre x de I. $f\,'(x)$ existe !

a) fonction dérivée :

définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction qui associe à tout x de I le nombre dérivé $f\,'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f. On la note $f\,'$

Ex :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (x - 3)^2$. Soit a un nombre réel.
Déterminons la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction f :
On a pour tout réel h non nul,

$$\frac{f(\text{a}+\text{h}) - f(\text{a})}{\text{h}} = \frac{[(\text{a}+\text{h}) - 3]^2 - (\text{a}-3)^2}{\text{h}} = \frac{(\text{a}+\text{h}-3-\text{a}+3)(\text{a}+\text{h}-3+\text{a}-3)}{\text{h}}$$

$$= \frac{\text{h x }(2\text{a} - 6 + \text{h})}{\text{h}} = 2\text{a} - 6 + \text{h}$$

Quand h tend vers 0, 2a – 6 + h tend vers 2a – 6.
Quel que soit le nombre a appartenant à $\mathbb{R}$, le nombre dérivé de f en a est un réel, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction dérivée est :
$f\,' : x \longmapsto 2x - 6$

b) dérivées de fonctions usuelles :

propriété : Soient m et p deux nombres réels.
Toute fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = m$

► **démonstration**
Pour tous nombres réels a et h (h ≠ 0), on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{[m(a+h)+p]-(ma+p)}{h} = \frac{ma+mh+p-ma-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

Le taux d'accroissement tend vers m quand h tend vers 0.

forcément puisque le taux d' accroissement est ici toujours égal à m !!

La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$

propriété : Soit k un nombre réel.
La fonction constante f définie par $f(x) = k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 0$

► **démonstration**
Pour tous nombres réels a et h (h ≠ 0), on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$$

La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$

propriété :
La fonction identité f définie par $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 1$

► **démonstration**
Pour tous nombres réels a et h (h ≠ 0), on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$

propriété :
La fonction carré f définie par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$

► **démonstration**
Pour tous nombres réels a et h (h ≠ 0), on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

Le taux d'accroissement tend vers 2a quand h tend vers 0.
La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

propriété *admise*:
La fonction puissance f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = nx^{n-1}$

propriété :

on peut aussi dire que f est dérivable sur : $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$!

La fonction inverse f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Sa fonction dérivée est définie sur chacun de ces intervalles par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

► **démonstration**

Pour tous nombres réels a et h (tels que $a + h \neq 0$ et $h \neq 0$), on a :

diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a-a-h}{(a+h)a}}{h} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(a+h)a}$$

ceci est vrai quel que soit le signe de a !

Le taux d'accroissement a pour limite $-\dfrac{1}{a^2}$ quand h tend vers 0.

La fonction est donc dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

propriété :

La fonction racine carrée f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Sa fonction dérivée est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

► **démonstration**

Pour tous nombres réels a et h tels que $a > 0$ et $a + h > 0$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} =$$

$$\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Le taux d'accroissement tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ quand h tend vers 0.

le nombre dérivé n'est pas défini en 0 !

La fonction est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$