UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE- INGENIORAT

Année universitaire: 2012 -2013
SESSION DU 30-31 Janvier 2013
Options : TOUTES
Matière : MATHEMATIQUES
Durée : 03heures

EXERCICE 1

Soit la suite d'intégrales

$I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ et pour n entier $n\geq 1$, $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) Calculer I_o
2) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. calculer I_1, I_2, I_3 et I_4
3) Soit $J_n=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} x^n e^{-x}\,dx$ $(n\geq 1)$

Montrer que $0\leq J_n \leq \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

4) Sachant que $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}$
   a) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$
5) Soit $n\in N$, on admettra qu'il existe un couple d'entiers naturels (a_n,b_n) tel que $I_n= a_n-b_n e^{-1}$
   a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence :
      $a_{n+1}= (n+1)a_n$
      $b_{n+1}=(n+1)b_n+1$
   b) Montrer que $a_n=n!$ et $b_n= n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

EXERCICE 2

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$
   a) Calculer P(-1)
   b) Factoriser P(z) puis résoudre dans C l'équation P(z)=0
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique =2cm). On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=2+i\sqrt{3}$, $z_C=2-i\sqrt{3}$, $z_G=3$
   a) Placer les points A, B, C et G
   b) Calculer les distances AB, BC et AC, en déduire la nature du triangle ABC
   c) Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC
3) Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12$ (1)

a) Montrer G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$
b) Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ (2)
c) Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D)
d) Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{GC}=0$
e) En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

EXERCICE-3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 4cm).

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\ln(1+e^{-x})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

PARTIE A

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$
2) Etudier le sens de variation de f.
3) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=-x+\ln(1+e^{x})$. En déduire que la courbe Γ admet, en $-\infty$, une asymptote, notée Δ.
4) Tracer Δ et Γ.

PARTIE B

1) Calculer $f'(x)$
2) On note A, B et C les points de Γ d'abscisses respectives 0, 1 et -1. On appelle T_0, T_1 et T_{-1} les tangentes respectives à la courbe Γ aux points A, B et C.
   a) Démontrer que la droite (BC) est parallèle à droite T_0.
   b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T_1 et T_{-1}

PARTIE C

1) Soient u et v les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $u(t)=\ln(1+t)-t$ et
$$v(t)=\ln(1+t)-t+\frac{1}{2}t^2$$
Etudier les variations de u et v. En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :
$t-\frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$
2) Soit n entier naturel ($n\geq 1$). On considère le nombre $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$

Démontrer que $\frac{1-e^{-n}}{e-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}\leq S_n\leq\frac{1-e^{-n}}{e-1}$