Université d'Antananarivo
Ecole Supérieure Polytechnique
.....
Concours d'entrée en Première Année

Année Universitaire 2011-2012
Session du 30 Nov-01 Décembre
Option : **Toutes**
Matière : **Mathématiques**
Durée : **03 heures**

Exercice (6 points)

1) On considère l'équation (E) : $2z^2 - (5 - i\sqrt{3})z + 2(1 - i\sqrt{3}) = 0$ où z représente un nombre complexe. Résoudre cette équation dans C. On désignera par z_1 la solution réelle et par z_2 l'autre solution.

2) Dans le plan *P* rapporté au repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm, on note A et B les points d'affixes respectives 2 et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Soit *S* l'application de *P* dans *P* qui à tout point M d'affixe z associe le point M' = *S* (M) d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

   a) Déterminer l'affixe du point A' = *S* (A), l'affixe du point O' = *S* (O) , ainsi que l'affixe du point P tel que *S* (P) = 0.
   b) Placer dans le même repère les points A, A', B et P.

3) On pose z = x + i y et z' = x' + i y' où x, y, x', y' sont réels.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de *S*.
   c) Soit *C* le cercle de diamètre [A P] . Déterminer l'image *C'* de *C* par *S*. Construire *C* et *C'* dans le même repère.

Problème

Partie A (6 points)

Soit (u_n) une suite de nombres réels à termes positifs définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in N$ $U_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$.

1) Démontrer que pour tout $n \in N$ on a $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
2) Montrer que pour tout $n \in N$ la suite (u_n) est une suite décroissante.
3) En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente vers une limite α tel que $\alpha = 2 - e^{-\alpha}$
4) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   Démontrer que la limite $\alpha = \lim_{n\to+\infty}(u_n)$ est solution de l'équation $h(x) = (-x+2)e^x - 1 = 0$.

Partie B (8 points)

On considère la fonction *f* définie sur *R* par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x + Ln(-2x)} & si\ x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} & si\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On note par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm. On admet dans toute la suite que $x + Ln(-2x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et que $e^x - x > 0$ sur $[0, +\infty[$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.
2) Montrer que pour tout x de $]-\infty, 0[$ on a $f'(x) \geq 0$ *si et seulement si* $x \leq -\frac{e}{2}$ où $f'(x)$ désigne le nombre dérivé de f en x.
3) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ où $h(x) = (-x+2)e^x - 1$

   b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

   c) En déduire le signe de $h(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
4) Etudier suivant les valeurs de x de R, la position relative de C par rapport à la droite D d'équation $y = 1$.
5) Tracer C et D. On prendra $\alpha = 1,84$ et $f(\alpha) = 1,20$.
6) a) Montrer que pour tout x de $[-\frac{e}{2}; -1]$, on a $\frac{e}{e-2} \geq f(x) \geq \frac{1}{1-Ln2}$

   b)En déduire un encadrement de l'aire du domaine limité par C, l'axe (x'Ox) et les deux droites $x = -\frac{e}{2}$ et $x = -1$ en cm^2.