12 p

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Matière : ***Mathématiques*** 2008 - 2009

Durée : ***3 heures***

Exercice n°1

1) Linéariser sin^3x *(0.5 pt)*
2) Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1+\sin x)^2 dx$ *(1 pt)*

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$ pour x > 0 et $f(0)=0$.

On note *(C)* la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm) .

Partie A

1) Démontrer que la droite d'équation (Δ) : $y = 1$ est asymptote à *(C)*. *(0,5pt)*
2)

a)Pour x > 0, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ et étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 . *(1 pt)*

b) Que peut-on en déduire pour la fonction *f* ? *(0,5pt)*

c) Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? *(0,5pt)*

3)

a) Pour tout x de]0 ;+∞ [, calculer la dérivée de *f* . *(0,5 pt)*

b) Etudier les variations de la fonction *f* et dresser le tableau des variations de *f*. *(1pt)*

c) Tracer la courbe représentative de *f* *(0,5pt)*

Partie B

On note *g* la fonction définie sur]0 ; + ∞ [par $g(x) = f(x) - xf'(x)$

1) Montrer que dans] 0 ; +∞ [, les fonctions $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes. *(1pt)*
2) Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle *(1pt)*
3) On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Montrer que $A = f'(\alpha)$ *(1pt)*

Partie C

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$
   a. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ *(0,5pt)*
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) *(0,5pt)*
2) Démontrer que la fonction *h*, définie sur]0 ;+ ∞ [par $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de *f* sur]0 ;+ ∞ [*(0,5pt)*
3) Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat *(1pt)*
4) La suite (u_n) est-elle convergente ? *(0,5pt)*

Exercice n°3

$(E) = 4z^3 - 2(1+3i)z^2 - (4+i)z + i = 0$

1) On considère dans C l'équation

$$(E) : 4z^3 - 2(1+3i)z^2 - (4+i)z - 1 + i = 0$$

a) Montrer que l'équation admet une racine imaginaire pure z_1 que l'on déterminera. *(1pt)*

b) Résoudre l'équation *(E)* .On notera z_2 la solution réelle et z_3 l'autre solution. *(1,5pt)*

2) Soit f l'application de $C-\{2\}$ dans C définie par : pour tout $z \in C-\{2\}$, $f(z) = \dfrac{2z-i}{2-z}$

a) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y *(1pt)*

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z pour que $f(z)$ soit imaginaire pur. *(1pt)*

3) Dans le plan complexe *(P)*, on considère l'application $S : M(z) \to M'(z')$ définie par : $z' = 2iz + 2 + i$

a) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_3 le point d'affixe z_3 .Vérifier que $S(M_1) = M_3$ *(0,5pt)*

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. *(1,5pt)*

c) Déterminer l'ensemble (Γ') image de (Γ) par S. *(0,5pt)*

4) a) Déterminer l'ensemble (ζ) des points M d'affixe z tels que $|2z - i| = 1$ *(1pt)*

b) Quelle est l'image (ζ') par l'application S. *(0,5pt)*