Série D - session 2011 : exercice 1 – corrigé

1- Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure $i\alpha$

Soit l'équation (E) : $z^3 + (1-i)z^2 + (-8+4i)z - 4 - 28i = 0$.

(E) admet une solution imaginaire pure $i\alpha$ où α est un réel si et seulement si l'équation $(i\alpha)^3 + (1-i)(i\alpha)^2 + (-8+4i)(i\alpha) - 4 - 28i = 0$ admet une solution

$z = i\alpha$ est solution de (E) ssi $(i\alpha)^3 + (1-i)(i\alpha)^2 + (-8+4i)(i\alpha) - 4 - 28i = 0$

donc ssi $-i\alpha^3 - (1-i)\alpha^2 + (-8+4i)i\alpha - 4 - 28i = 0$.

Cette égalité est vraie lorsque la partie réelle et la partie imaginaire du premier membre sont nulles, donc si et seulement si : $-\alpha^3 + \alpha^2 - 8\alpha - 28 = 0$ et $-\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$.

La deuxième équation donne une racine double $\alpha' = \alpha'' = -2$. Ce nombre est aussi solution de la première équation donc la racine imaginaire pure de (E) est $z = i\alpha = -2i$.

2 - a) Montrons que (E) s'écrit sous la forme $(z + \alpha i)(az^2 + bz + c)$

Soit $P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (-8+4i)z - 4 - 28i$.

z = -2i est une racine de P(z), donc P(z) est factorisable par z+2i. En d'autres termes, il existe des nombres a, b et c tels que $P(z) = (z+2i)(az^2 + bz + c)$ (1)

Déterminons les nombres a, b et c vérifiant l'égalité précédente.

En développant l'expression (1), on a $(z+2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b + 2ai)z^2 + (c + 2bi)z + 2ic$

Par identification on a : a= 1 , b = 1-3i et c = -14 + 2i, et

$P(z) = (z+2i)(z^2 + (1-3i)z - 14 + 2i)$

b) Résolution de (E)

(E) $z^3 + (1-i)z^2 + (-8+4i)z - 4 - 28i = 0$ équivaut à $(z+2i)(z^2 + (1-3i)z - 14 + 2i) = 0$

donc équivaut à (z+2i =0 ou $z^2 + (1-3i)z - 14 + 2i = 0$)

z+2i= 0 si et seulement si z = -2i

Pour $(z^2 + (1-3i)z - 14 + 2i) = 0$, le discriminant $\Delta = 48 - 14i$.

Soit δ une racine de Δ. Posons $\delta = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 48 & (1) \\ 2ixy = -14i & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 & (3) \end{cases}$$

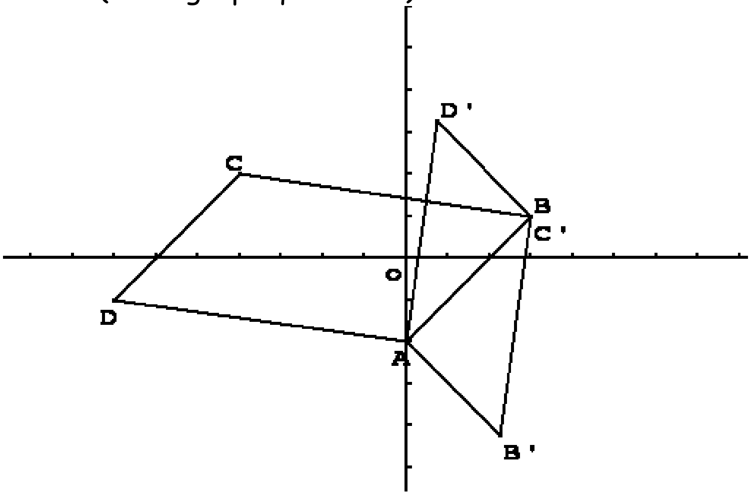
Les équations (1) et (3) donnent, par addition membre à membre, $2x^2 = 98$, et par soustraction membre à membre $y^2 = 2$. D'où, x = 7 ou x = -7 et y=1 ou y = -1.

D'après l'équation (2) x et y sont de signes contraires, donc, $\delta = -7 + i$ ou $\delta = 7 - i$.

On a alors $z = 3 + i$ ou $z = -4 + 2i$

Et $S = \{-2i ; 3 + i ; -4 + 2i\}$

3- a) Construction (unité graphique : 1 cm)



b) Forme trigonométrique de Z

On a $Z = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3 + i + 2i}{-4 + 2i + 2i} = -\dfrac{3}{4}i.$

Z est imaginaire pur et $-\dfrac{3}{4} < 0$ donc $|Z| = \dfrac{3}{4}$ et $\arg Z = -\dfrac{\pi}{2}.$

Alors $Z = \dfrac{3}{4}(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$

c) Nature du triangle ABC

$\arg\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

d) Affixe du point D

Soit D le point d'affixe z_D

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$,

Donc si et seulement si -2i- z_D = 3 + i +4-2i.

Ce qui donne z_D= -7-i

4 – a) Nature de la transformation S

Soit S la transformation d'expression complexe $z' = \dfrac{4}{3}iz - \dfrac{8}{3} - 2i.$

C'est de la forme : z ' = az+ b avec $a = \dfrac{4}{3}i$

On a : $\left|\dfrac{4}{3}i\right| = \dfrac{4}{3}$, $\arg\dfrac{4}{3}i = \dfrac{\pi}{2}$

donc S est une similitude plane directe de rapport $k = \dfrac{4}{3}$, et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Son centre est A

b) Image de ABCD par S^{-1}.

S^{-1} est la similitude plane directe de centre A, de rapport $k = \dfrac{3}{4}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

Construction (voir figure)