Série C - session 2010 : exercice partie A – corrigé

A – Arithmétique

1) Division euclidienne de (- 283) par 19

On écrit $-283 = 19\,q + r$ avec $0 \leq r < 19$ et $q \in \mathbb{Z}$

On a $283 = 19 \,.\, 14 + 17$ et $-283 = 19 \,.\, (-14) - 17 = 19 \,.\, (-14) - 19 + 19 - 17$

$-283 = 19 \,.\, (-15) + 2$ donc $q = -15$ et $r = 2$

2) a- Division de 11 par 7

On a $11 = 7 \times 1 + 4$ donc $11 \equiv 4\ [7]$

b- Montrons que $2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1}$ est divisible par 7

Considérons les restes dans la division par 7 des puissances successives de 2 et de 3

- On a $2^1 \equiv 2\,[7]$; $2^2 \equiv 4\ [7]$; $2^3 \equiv 1\ [7]$

Donc $(2^3)^n \equiv 1^n\ [7]$ i.e . $2^{3n} \equiv 1\ [7]$ et $2^{3n+1} = 2^{3n}.2 \equiv 1.2\ [7]$

D'où $2^{3n+1} \equiv 2\,[7]$

- On a $3^1 \equiv 3\,[7]$; $3^2 \equiv 2\,[7]$; $3^3 \equiv 6\,[7]$; $3^4 \equiv 4\,[7]$; $3^5 \equiv 5\,[7]$; $3^6 \equiv 1\,[7]$

D'où $3^{6n} \equiv 1\,[7]$

- On a $11 \equiv 4\,[7]$ ce qui implique $11^{3n+1} \equiv 4^{3n+1}\ [7]$

or $4^{3n+1} = 2^{3n+1} \times 2^{3n+1} \equiv 2 \times 2\ [7]$ d'où $11^{3n+1} \equiv 4\,[7]$

alors $2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1} \equiv (2+1+4)\,[7]$

$2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1} \equiv 0\,[7]$

$2^{3n+1} + 3^{6n} + 11^{3n+1}$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) Divisibilité par 11

Soit $X = \overline{a_p\, a_{p-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$ le symbole de X dans le système décimal

On a $X = a_p\, 10^p + a_{p-1}\, 10^{p-1} + \ldots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10 + a_0$

Considérons les restes des puissances successives de 10 dans la division par 11

$10^1 = 10 \equiv 11 - 1\ [11]$; $10^2 \equiv 1\,[11]$

D'où $10^{2k} = \left(10^2\right)^k \equiv 1\,[11]$; $10^{2k+1} = 10^{2k} \,.\, 10 \equiv 11 - 1\ [11]$

Toutes les puissances paires de 10 ont pour reste 1

Toutes les puissances impaires de 10 ont pour reste 10 = 11 – 1

On peut écrire successivement (mod . 11)

$$a_0 \equiv 1 \,.\, a_0$$
$$a_1\,10 \equiv 11\,a_1 - 1a_1$$
$$a_2\,10^2 \equiv 1.a_2$$
$$\cdots$$
$$a_{2k-1}\,10^{2k-1} \equiv 11\;a_{2k-1} - 1\,a_{2k-1}$$
$$a_{2k}\;10^{2k} \equiv 1 \,.\, a_{2k}$$

Par addition, on a

$$X \equiv 11\,(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + \cdots) + (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2k} + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + \cdots)$$

le 1[er] terme de la somme étant divisible par 11, alors

$$X = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2k} + \cdots - a_1 - a_3 - - - a_{2k-1} - \cdots$$

ou $X \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^j.a_j + \cdots = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\; a_j$

d'où $X \equiv 0\;[11]$ si $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j\; a_j \equiv 0\;[11]$