Série C - session 2009 : exercice partie B – corrigé

ARITHMETIQUE

1 - Calcul dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Pour $a = \overline{4}$, $a^2 - \overline{3}a + \overline{2} = \overline{4}^2 + \overline{3}.\overline{4} + \overline{2} = \overline{30} = \overline{0}$

D'où $a^2 - \overline{3}a + \overline{2} = \overline{0}$

2 - a) Résolution dans Z^2 de 7x-3y = 0

On a 7x = 3y. 7 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss

x = 3k et y = 7k , $k \in \mathbb{Z}$

b) Utilisation de l'algorithme d'Euclide pour rechercher une solution particulière de (F) : 7x-3y =2

On a $7 = 3 \times 2 + 1$ alors $7 - 3 \times 2 = 1$

$x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ est un couple de solution particulière de l'équation 7x-3y = 1.

En multipliant par 2, on a $2x_0 = 2$ et $2y_0 = 4$ est solution particulière de (F). Alors

$$\begin{cases} 7x - 3y = 2 \\ 7.2 - 3.4 = 2 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre on a : 7 (x-2) - 3 (x-4) = 0 i.e. 7 (x-2) = 3 (x-4)

En utilisant les résultats de la question 1-)

On a x-2 = 3k et y -4 = 7k , $k \in Z$

D'où, les solutions de l'équation (F) : (3k +2 ; 7k +4) , $k \in Z$.