Série A – session 2011 : exercice 1 – corrigé

1.- Calcul de U_1 , V_0 et V_2

On a $U_1 = \frac{3}{2}$; $V_0 = 1$ et $V_1 = \frac{1}{2}$

2.-a) Montrons que (V_n) est suite géométrique

On a
$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{V_{n+1} - 1}{V_n - 1}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(U_n + 1) - 1}{U_n - 1} = \frac{\frac{1}{2}(U_n - 1)}{U_n - 1}$$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Expression de V_n et U_n en fonction de n

On a $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Comme $V_n = U_n - 1$ donc $U_n = V_n + 1$

D'où $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

3.- a) Montrons que (W_n) est une suite arithmétique

On a $W_{n+1} - W_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(\frac{2}{1}\right)^n\right]$

d'où $W_{n+1} - W_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

(W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et de premier terme $W_0 = \ln V_0 = 0$

b) Expression de W_n en fonction de n

On a $W_n = 0 + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

c'est-à-dire $W_n = n\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -n\ln 2$

Limite de (W_n). On a $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln 2 = -\infty$