Série A – session 2003 : problème – corrigé

Etude de la fonction f définie par $f(x) = 1 - 2x + e^x$.

1 – a) L'ensemble de définition de f.

f est définie sur $]-\infty\,;+\infty[$

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x+e^x) = +\infty$

c) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$

2 - a) Calcul de f '(x).

On a $f'(x) = -2 + e^x$

b) Tableau de variation de f.

$f'(x) = 0$ lorsque $-2 + e^x = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2$, ou $x = \ln 2$.

Et, $f'(x) > 0$ lorsque $-2 + e^x > 0$, c'est-à-dire $x > \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f (x)	$+\infty$	↘	$3 - \ln 2$	↗	$+\infty$

On a $f(\ln 2) = 1 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 1 - 2\ln 2 + 2 = 3 - \ln 2$

3 - a) Intersection de la courbe (*C*) avec l'axe des ordonnées (y'Oy).

C'est le point *A* d'abscisse $x = 0$

On a : $f(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$, d'où *A* $(0\,;2)$

b) Equation de la tangente (T) à (*C*) au point *A*.

On a $f'(0) = -2 + e^0 = -1$

L'équation de la tangente (T) en $x_0 = 0$ est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Alors $(T) : y = -x + 2$

4 - a) Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x+1)]$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(1-2x+e^x) - (-2x+1)]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) = 0$

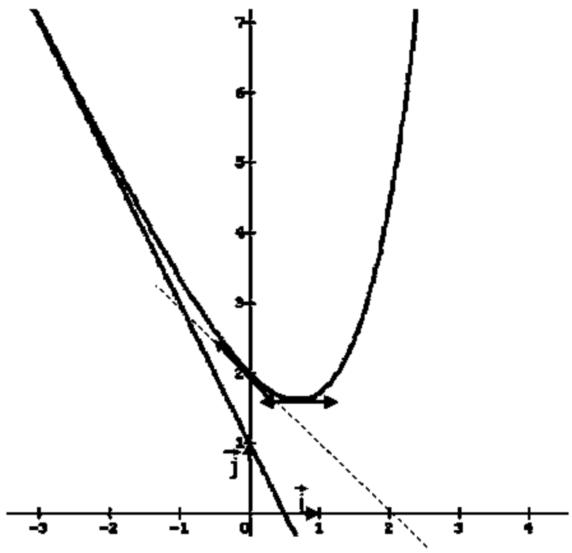
Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x+1)] = 0$

D'où , (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x + 1$.

b) Branche infinie de (C) lorsque x tend vers + ∞

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (y 'Oy).

5 – Courbe représentative de (C) : unité graphique 1 cm



6 -a) Une primitive F de f sur IR.

F est définie par : $F(x) = -x^2 + x + e^x$

b) Calcul de l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=ln 2.

Unité d'aire : 1 cm^2

On a $A = [\ F(\ln 2) - F(0)\ ]\ cm^2$.

Or $F(\ln 2) = -(\ln 2)^2 + \ln 2 + e^{\ln 2} = -(\ln 2)^2 + \ln 2 + 2$

Et $F(0) = -(0)^2 + 0 + e^0 = 1$

D'où $A = |-(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1|\ cm^2$.