Série A – session 2003 : exercice 2 – corrigé

1 – Calcul de u_2 , u_3 et v_1

La suite (u_n) définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$

On a $u_2 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4}$

$u_3 = \frac{1}{4}u_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{11}{4} + \frac{3}{2} = \frac{35}{16}$

Et $v_1 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

2 - Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Expression de v_{n+1} en fonction de u_{n+1}

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

En remplaçant u_{n+1} par son expression

On a $v_{n+1} = (\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}) - 2 = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$

C'est-à-dire $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 2) = \frac{1}{4}v_n$.

D'où : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = 3$.

3 - Expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

On a $v_n = v_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ c'est-à-dire $v_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

D'où $u_n = v_n + 2 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2$

4 – a) Montrons que (w_n) est une suite arithmétique

On pose $w_n = \ln v_n$

On a $w_{n+1} - w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$

D'où $w_{n+1} - w_n = \ln(\frac{1}{4})$

(w_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln(\frac{1}{4})$ et de premier terme $w_1 = \ln(v_1) = \ln 3$

b) Expression de $Sn = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ en fonction de n.

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est

$$S_n = \text{nb de termes}\,\frac{(1^{er}\text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

C'est-à-dire $S_n = (n - 1 + 1)\frac{(w_1 + w_n)}{2}$

Avec $w_n = w_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)\ln(\frac{1}{4}) = 3 + (n-1)(-\ln 4)$

D'où $S_n = n\frac{[2\ln 3 - (n-1)\ln 4]}{2}$

Comme $\ln 4 = 2 \ln 2$, alors $S_n = n[\ln 3 - (n-1)\ln 2]$