Série A – session 2002 : problème – corrigé

Etude de la fonction définie par f(x) = 2 ln x (ln x – 1)

1- a) Ensemble de définition D_f de f.

La fonction ln est définie pour x > 0. Donc $D_f =]0 ; +\infty[$

b) Calcul des limites aux bornes de D_f.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln(x) - 1) = -\infty$

alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Dérivée de f

f(x) est de la forme u(x) . v(x)

Posons u(x) = 2 ln x et v(x) = ln x -1

On a $u'(x) = 2\frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

Alors $f'(x) = 2\left[\frac{2}{x}.(\ln x - 1) + \ln(x).\frac{1}{x}\right]$

D'où $f'(x) = \frac{2(2\ln x - 1)}{x}$

d) Tableau de variation de f.

On a f '(x) = 0 lorsque 2 ln x - 1 = 0

C'est-à-dire $\ln x = \frac{1}{2}$, d'où $x = e^{\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

On a $f(\frac{1}{2}) = 2\ln(e^{\frac{1}{2}})(\ln(e^{\frac{1}{2}}) - 1) = 2 \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{2}$

2 – a) Coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses (x'Ox).

On cherche les points d'abscisse x tels que f(x) = 0

On a f(x) = 0 lorsque 2 ln x (ln x – 1)

C'est-à-dire ln x = 0 ou ln x = 1

Ce qui implique $x = e^0 = 1$ ou x = e

Donc, (C) coupe l'axe (x'Ox) aux points A (1 ; 0) et B (e ; 0).

b) Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e.

L'équation de (T) est de la forme : y = f '(e) (x – e) + f(e)

Or $\qquad f(e) = 0 \quad$ et $\quad f'(e) = \dfrac{2(2\ln e - 1)}{e} = \dfrac{2}{e}$

Alors, l'équation de (T) est : $\quad y = \dfrac{2}{e}x - 2$

c) Montrons que (*C*) admet un point d'inflexion I.

Rappelons que : (*C*) admet un point d'inflexion en x_0 lorsque f "(x) s'annule et change de signe en x_0.

On a $\qquad f'(x) = \dfrac{2(2\ln x - 1)}{x}$

La dérivée seconde $\quad f''(x) = 2\dfrac{\frac{2}{x}.x - 1.(2\ln x - 1)}{x^2} = 2\dfrac{2 - 2\ln x + 1}{x^2}$

D'où $\qquad f''(x) = 2\,\dfrac{3 - 2\ln x}{x^2}$

f "(x) s'annule lorsque 3 – 2ln x = 0

i.e. $\qquad \ln x = \dfrac{3}{2} \quad$ ou $\quad x = e^{\frac{3}{2}}$

Comme $\dfrac{2}{x^2} > 0$ sur] 0 ; +∞ [, alors sg (f"(x)) = sg (3 – 2ln x)

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f "(x)	+	0	-

f "(x) s'annule et change de signe en $e^{\frac{3}{2}}$, donc le point I d'abscisse $x = e^{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion.

On a $\qquad f(e^{\frac{3}{2}}) = 2\ln(e^{\frac{3}{2}})(\ln(e^{\frac{3}{2}}) - 1) = 2 \times \frac{3}{2} \times (\frac{3}{2} - 1) = \frac{3}{2}$

Les coordonnées du point I sont $x_I = e^{\frac{3}{2}}$ et $y_I = \frac{3}{2}$.

3 - a) Etude des branches infinies de (*C*)

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, donc (*C*) admet une asymptote verticale d'équation x = 0

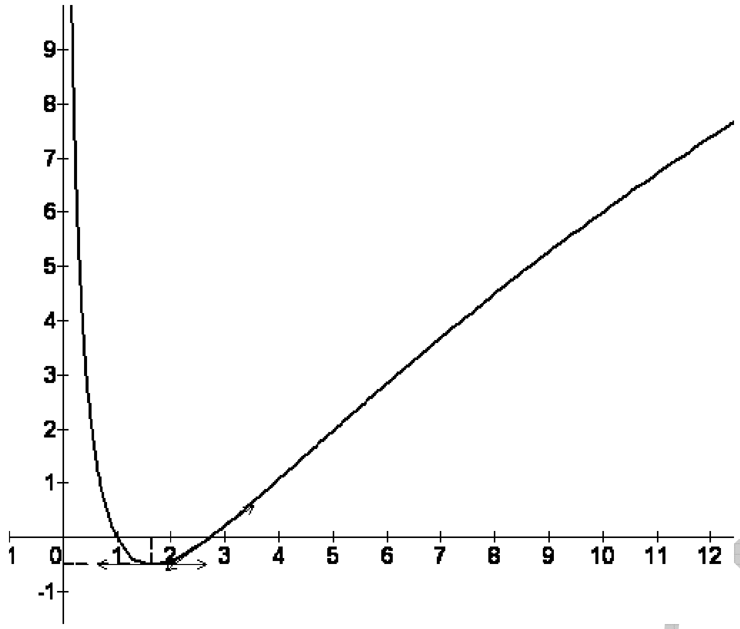
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, (*C*) admet une branche infinie parallèle à Ox.

b) Calcul de f (e^{-1}) et f (e^2)

On a $\qquad f(e^{-1}) = 2\ln(e^{-1})(\ln(e^{-1}) - 1) = 2 \times (-1) \times (-1 - 1) = 4$

On a $\qquad f(e^2) = 2\ln(e^2)(\ln(e^2) - 1) = 2 \times 2 \times (2 - 1) = 4$

c) Construction (unité graphique : 1 cm)



4 - a) Montrons que F est une primitive de f sur Df.

On a $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 6x \ln x + 6x$

Calculons sa dérivée $F'(x)$

On a $$F'(x) = [2.(\ln x)^2 + 2x.\frac{2}{x}.\ln x] - [6.\ln x + 6x.\frac{1}{x}] + 6$$

$$= [2.(\ln x)^2 + 4.\ln x] - [6.\ln x + 6] + 6$$

$$= 2.(\ln x)^2 - 2.\ln x = 2.\ln x(\ln x - 1)$$

D'où $F'(x) = f(x)$

Conclusion F est une primitive de f sur D_f.

b) Calcul de l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe (x'Ox) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

unité d'aire = 1 cm^2.

L'aire $A = |F(e) - F(1)| \times 1\,cm^2$

Avec $F(e) = 2e(\ln e)^2 - 6e \ln e + 6e = 2e$.

Et $F(1) = 2(\ln 1)^2 - 6 \ln 1 + 6 = 6$.

Alors $A = |F(e) - F(1)| \times 1\,cm^2 = |2e - 6| \times cm^2$

D'où $A = (6 - 2e).\ cm^2$.