Série A – session 2002 : exercice 1 – corrigé

1- Calcul des quatre premiers termes de (U_n)

On a $U_0 = 2$

$$U_1 = \frac{U_0^{\,2} - U_0 + 2}{U_0 + 1} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 + 1} = 0$$

$$U_2 = \frac{U_1^{\,2} - U_1 + 2}{U_1 + 1} = \frac{0^2 - 0 - 2}{0 + 1} = -2$$

$$U_3 = \frac{U_2^{\,2} - U_2 + 2}{U_2 + 1} = \frac{(-2)^2 - (-2) - 2}{-2 + 1} = -4$$

2 - a) Montrons que (U_n) est une suite arithmétique

On a

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^{\,2} - U_n + 2}{U_n + 1} - U_n$$

$$= \frac{U_n^{\,2} - U_n + 2 - (U_n^{\,2} + U_n)}{U_n + 1}$$

$$= \frac{-2(U_n + 1)}{U_n + 1} = -2$$

Donc, (U_n) est une suite arithmétique de raison r = -2 et de premier terme $U_0 = 2$.

b) Expression de U_n en fonction de n

On a $U_n = U_0 + nr$ i.e. $U_n = 2 - 2n$

c) Le sens de variation de (U_n)

(U_n) est une suite arithmétique de raison r = -2 négative, (U_n) est une suite décroissante.

3 - a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique

On a $V_n = e^{2(1 - n)}$ et $V_{n+1} = e^{2[1 - (n+1)]} = e^{-2n}$.

Alors $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{e^{-2n}}{e^{2(1-n)}} = e^{-2}$

Conclusion : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $V_0 = e^2$.

b) Calcul de la limite de V_n quand $n \to +\infty$.

(V_n) est une suite géométrique dont la raison q est telle $0 < q < 1$, donc $\lim V_n = 0$.