Série A - session 2000 : problème – corrigé

f définie sur l'intervalle] – 4 ; 2 [par : f (x) = ln (x + 4) – ln (2 – x).
($\mathcal{C}$) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Calcul des limites de f en – 4 et en 2.

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} [\ln(x-4) - \ln(2-x)] = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [\ln(x-4) - \ln(2-x)] = +\infty$$

Interprétation graphique de ces résultats :
Les droites d'équations x = -4 et x = 2 sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de f.

2. a)- Montrons que, pour tout x ∈] – 4 ; 2 [, $f'(x) = \dfrac{6}{(2-x)\ (x+4)}$

On a $f'(x) = \dfrac{(x+4)'}{(x+4)} - \dfrac{(2-x)'}{(2-x)} = \dfrac{1}{(x+4)} + \dfrac{1}{(2-x)} = \dfrac{6}{(2-x)\ (x+4)}$

b)- Tableau de variation de f.

Puisque 6 est positive, et que pour tout x ∈] – 4 ; 2 [,
on a (x+4) (2-x) est positif , alors f est strictement croissante.

x	- 4		2
f' (x)		+	
f	- ∞	↗	+ ∞

3. a)- Intersection de ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses.

f(x) = 0 si ln (x + 4) - ln (2 - x)= 0 c-à-d si x = - 1.
Donc le point d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses est I (- 1 ; 0).

b)- Equation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point I(–1 ; 0).

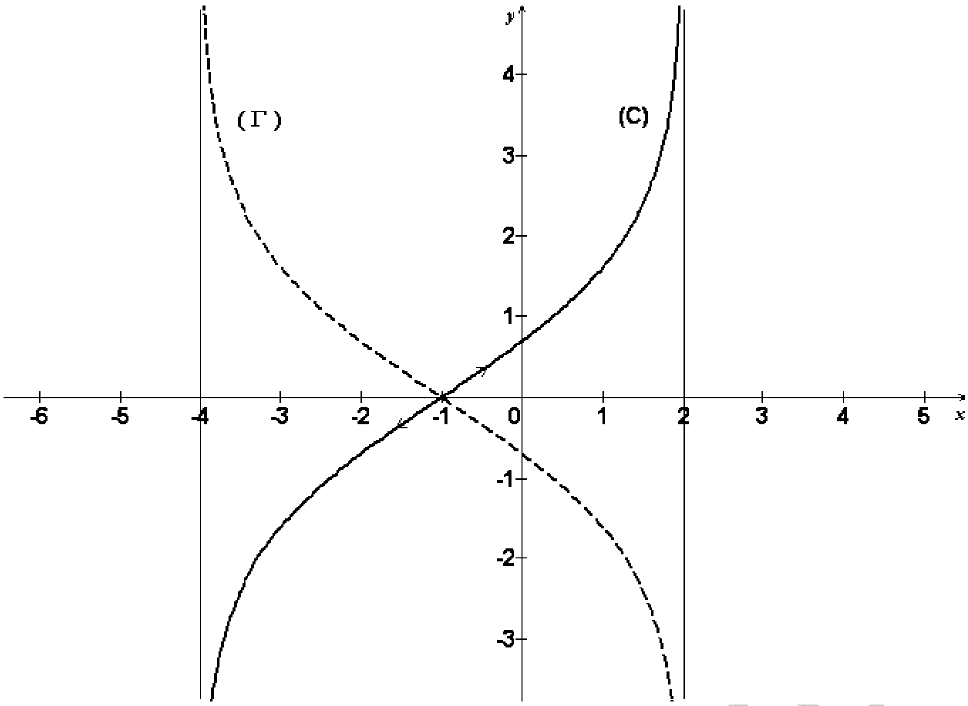
$$f'(-1) = \frac{2}{3} \ ;\ \text{donc (T) : } y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

c)- Montrons que I (–1 ; 0) est un centre de symétrie pour ($\mathcal{C}$).

f (- 2 – x) = ln (- 2 – x + 4) – ln (2 + 2 + x)
= ln (- x + 2) – ln (4 + x)
= ln (2 – x) – ln (4 + x)
= [ln (x + 4) – ln (2 - x)]
= - f (x)

Ainsi, f (- 2 – x)+ f (x) = 0 = 2 x 0

4. Traçage de (T) et de (*C*) dans un même repère.



5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle] – 4 ; 2 [par :

$F(x) = (x + 4)\ln(x + 4) - (x - 2)\ln(2 - x)$.

a)- Calcul de la fonction dérivée F ' de F :

$F'(x) = [\ln(x + 4) + 1] - [\ln(2 - x) + 1]$

$= \ln(x + 4) - \ln(2 - x)$

$= f(x)$

b)- Valeur exacte en cm² de l'aire du domaine plan limité par (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = – 1 et x = 0.

$A = [F(-1) - F(0)] \times 4 \text{ cm}^2$

Ainsi, $A = (4\ln 4 + 2\ln 2 - 3\ln 3 - 3\ln 3) \times 4 \text{ cm}^2$

Donc $A = (10\ln 2 - 6\ln 3) \times 4 \text{ cm}^2$

6. g la fonction définie sur] – 4 ; 2 [par : $g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$.

a)- Montrons que, pour tout $x \in$] – 4 ; 2 [: g (x) = – f (x).

Pour tout $x \in$] – 4 ; 2 [, 2 - x est positif ainsi que x + 4 ; Par conséquent,

$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) = \ln(2 - x) - \ln(x + 4) = -f(x)$

b)- Courbe représentative (Γ) de g.

(Γ) se déduit de (*C*) par la symétrie par rapport à l'axe x'Ox.