

Chapitre 8 : Les vecteurs du plan

Durée du chapitre selon le programme scolaire : 5 semaines (20 heures de cours)

Objectif général : L'apprenant doit être capable de définir un vecteur à partir d'une translation, d'effectuer des opérations géométriques et analytiques (somme, produit par un réel), de manipuler les coordonnées dans divers types de repères, et d'utiliser la colinéarité pour démontrer rigoureusement le parallélisme de droites ou l'alignement de points.

Nom du créateur : Equipe maths

Date de création : Avril 2026

Sources de documents :

- www.maths-et-tiques.fr 1, 2.
- [Cours complet \(Yvan Monka\), Démonstration Déterminant 3, 4.](#)
- Galilée.ac, Afterclasse 5, 6.

I. Introduction

II. LA TRANSLATION ET LA DÉFINITION DU VECTEUR.....	5
1. Définition géométrique par la transformation.....	5
2. Les trois caractéristiques fondamentales.....	5
III. LA TRANSLATION ET LA DÉFINITION DU VECTEUR.....	6
1. Les trois caractéristiques fondamentales.....	6
2. Propriétés de l'égalité.....	7
3. Caractérisation du milieu.....	8
IV. Somme de vecteurs et relation de chasles.....	9
1. Définition de la somme.....	9
2. La Relation de Chasles.....	10
3. La Règle du Parallélogramme.....	11
IV. VECTEURS OPPOSÉS, DIFFÉRENCE ET VECTEUR NUL.....	12
1. Le Vecteur Nul.....	12
2. Le Vecteur Opposé.....	12
3. Soustraction de vecteurs.....	12
V. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL.....	13

1. Produit par un scalaire.....	13
2. Règles de calcul(Distributivité).....	14
VII. GÉOMÉTRIE REPÉRÉE : BASES ET REPÈRES.....	15
1. Base du plan.....	15
2. Décomposition d'un vecteur Théorème.....	15
3. Notion de Repère.....	15
VIII. CALCULS ANALYTIQUES ET COORDONNÉES.....	16
1. Coordonnées d'un vecteur à partir de deux points dans un repère.....	16
2. Coordonnées du milieu.....	16
IX. NORME ET DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ.....	18
1. Norme d'un vecteur.....	18
2. Distance entre deux points.....	18
3. Lien avec le théorème de Pythagore.....	18
X. COLINÉARITÉ, DÉTERMINANT ET APPLICATIONS.....	19
1. Définition de la colinéarité.....	19
2. Le Déterminant (Critère analytique).....	20

Mathématiques Seconde

I. INTRODUCTION, HISTOIRE ET APPROCHE PHYSIQUE

1. Origine historique de la notion

Le terme « vecteur » tire son origine du latin *vehere*, signifiant « conduire » ou « transporter ». Bien que les concepts de glissement géométrique soient anciens, c'est le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865) qui a introduit formellement le terme. La notation actuelle $\overrightarrow{AB}$ avec une flèche supérieure n'a été adoptée de manière standardisée que vers 1960 [12, 13].

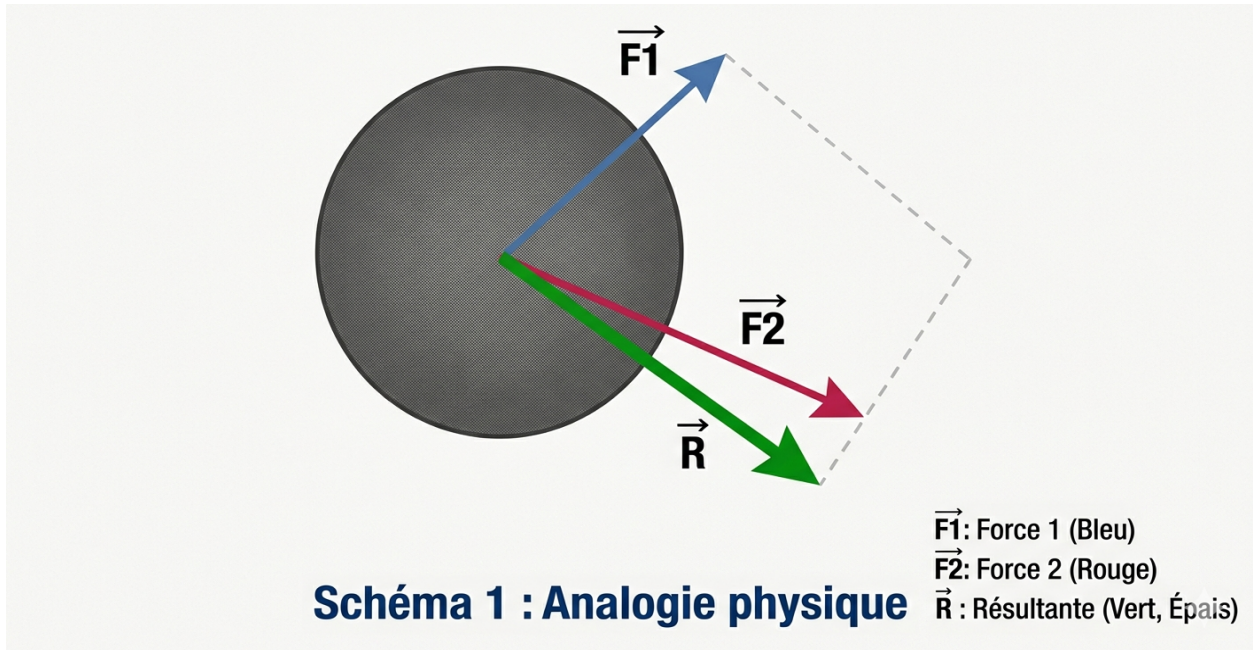
2. L'approche par physique

Forces et déplacements, En mathématiques comme en physique, un vecteur sert à modéliser une grandeur orientée. Contrairement à une grandeur scalaire (un simple nombre comme une température), une grandeur vectorielle

nécessite plusieurs informations pour être définie .

Analogie du caddie : Pour décrire l'action de pousser un caddie, il ne suffit pas de connaître l'intensité de la poussée ; il faut préciser la direction (la ligne droite suivie) et le sens (vers l'avant ou l'arrière).

La résultante : Si deux forces s'exercent sur un même objet, le mouvement final dépend de la "somme" de ces deux vecteurs.



II. LA TRANSLATION ET LA DÉFINITION DU VECTEUR

1. Définition géométrique par la transformation

Soient A et B deux points distincts du plan. La translation qui transforme A en B est une transformation qui "fait glisser" chaque point du plan selon le même modèle que le trajet de A vers B.

Définition formelle : À tout point M du plan, cette translation associe l'unique point M' tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ ont le même milieu.

Notation : On dit que cette translation est de vecteur $\vec{AB}$.

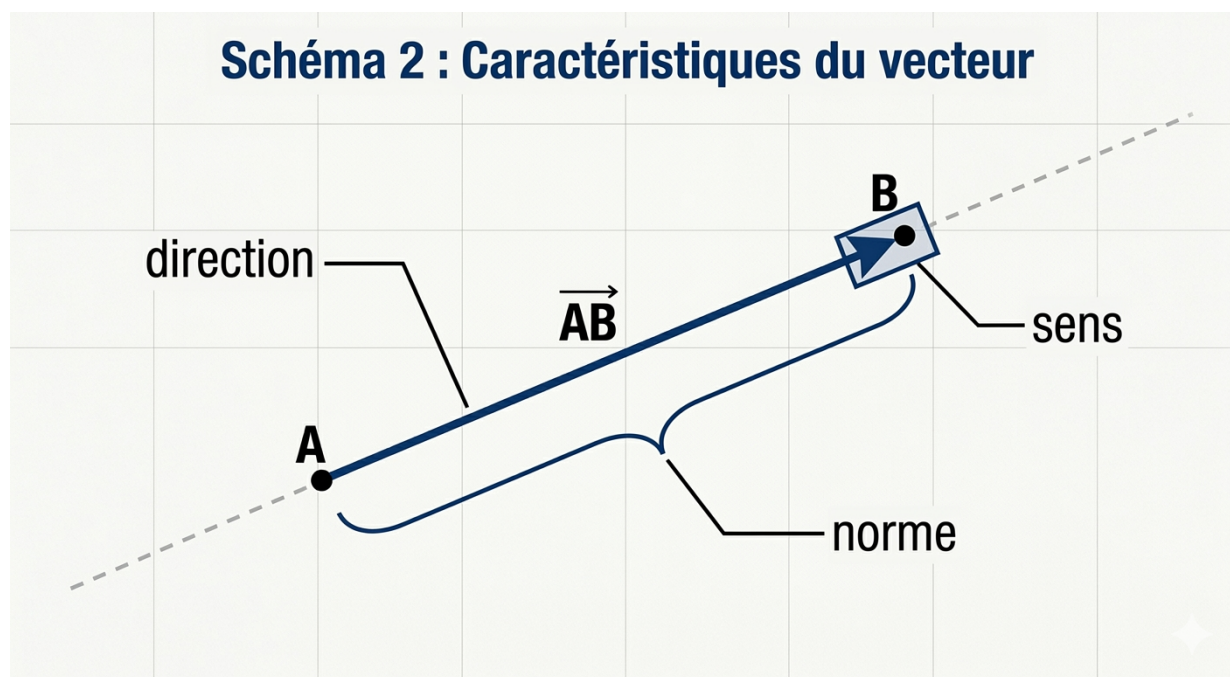
2. Les trois caractéristiques fondamentales

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est caractérisé par un triplet d'informations indissociables :

La direction : C'est la droite (AB), ou toute droite parallèle à celle-ci. Elle définit "l'inclinaison" du déplacement.

Le sens : Il indique de quel côté de la droite on se déplace (de A vers B). Une direction possède toujours deux sens possibles.

La norme : C'est la longueur du segment AB, notée $||\vec{AB}||$. C'est une valeur de distance, donc toujours positive ou nulle.

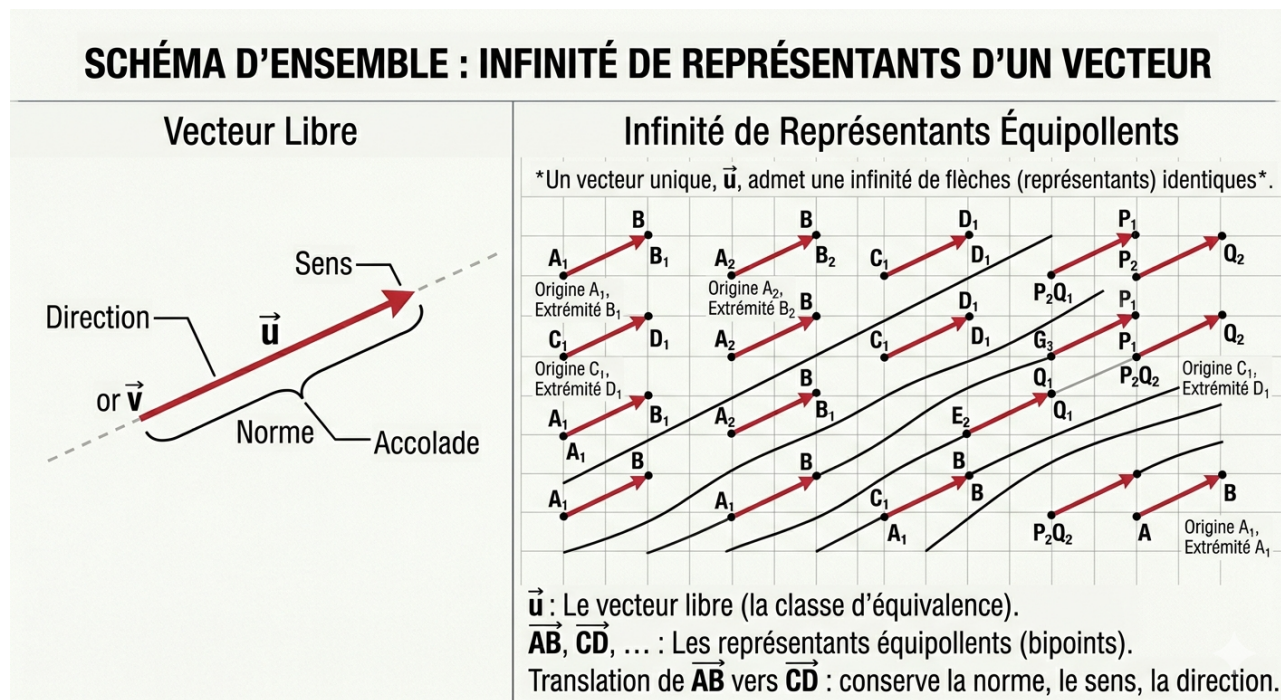


III. LA TRANSLATION ET LA DÉFINITION DU VECTEUR

1. Les trois caractéristiques fondamentales

Un vecteur n'est pas lié à une position fixe dans le plan. On peut le dessiner n'importe où, tant que ses trois caractéristiques restent identiques.

On dit qu'un vecteur admet une infinité de représentants .

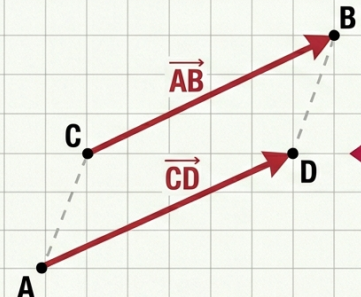
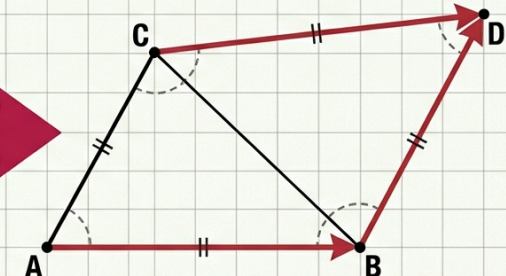


2. Propriétés de l'égalité

Des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux s'ils décrivent la même translation.

Propriété fondamentale : $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Attention à l'ordre : L'égalité $\vec{AB} = \vec{CD}$ implique que les diagonales AD et BC ont le même milieu .

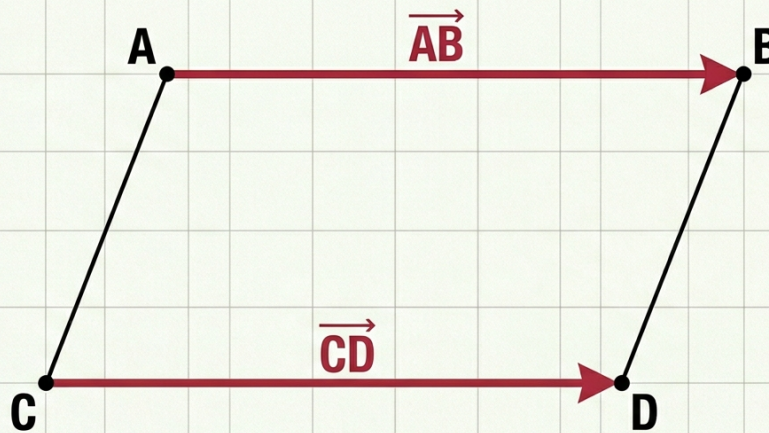
SCHÉMA GÉOMÉTRIQUE : $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme	
Vecteurs Égaux  Condition : $\vec{AB} = \vec{CD}$. (Même direction, même sens, même norme/accolade, comme $\vec{u}$ dans Schéma D'ENSEMBLE, $\langle \mathcal{D} \rangle$).	Quadrilatère ABDC est un Parallélogramme Propriété : $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.  Conclusion : ABDC est un parallélogramme. $\Leftrightarrow$ Les côtés opposés (AB and CD, AC and BD) sont parallèles et de même longueur. Et les diagonales AD and BC se coupent en leur milieu.

3. Caractérisation du milieu

Le point I est le milieu du segment AB si et seulement si :

$$\vec{AI} = \vec{IB} \text{ ou } \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{0}$$

Schéma 3 : Égalité et Parallélogramme



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux en norme, direction, et sens, comme illustré en rouge.

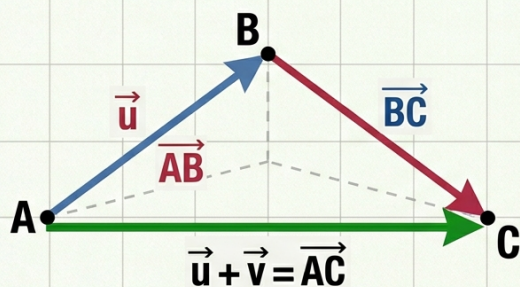
IV. Somme de vecteurs et relation de chasles

1. Définition de la somme

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la composition (l'enchaînement) des deux translations correspondantes.

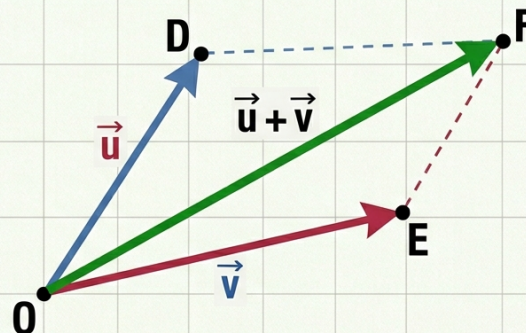
Schéma 4 : Construction de la Somme

Figure A: Méthode "Chasles"
(Vecteurs à la suite)



Vecteurs positionnés bout-à-bout.
La somme $\vec{AC}$ est le déplacement total de A vers C.

Figure B: Méthode du Parallélogramme
(Origine commune)



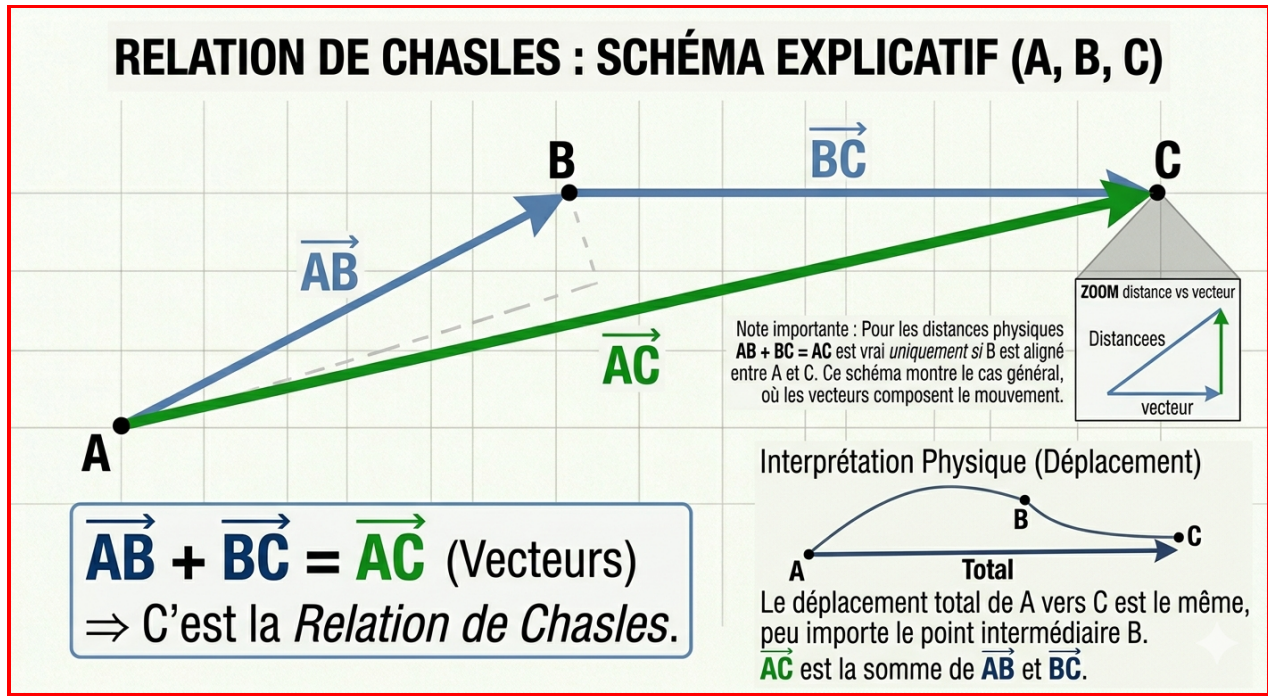
Deux vecteurs partant de l'origine O.
La somme est la diagonale du parallélogramme formé par leurs représentants.

2. La Relation de Chasles

C'est la règle fondamentale pour additionner des vecteurs "bout à bout".

Propriété : Pour tous points A, B et C du plan :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



Interprétation : Le déplacement total de A vers C est le même que de passer par l'étape intermédiaire .

3. La Règle du Parallélogramme

Cette méthode est utilisée quand les deux vecteurs partent du même point d'origine.

Propriété : Si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$ alors leur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\vec{AD}$ tel que ABDC soit un parallélogramme.

V. VECTEURS OPPOSÉS, DIFFÉRENCE ET VECTEUR NUL

1. Le Vecteur Nul

Lorsque l'origine et l'extrémité d'un vecteur sont confondues ($A=B$), on obtient le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Propriété : Il n'a ni direction, ni sens. Sa norme est rigoureusement égale à 0. Pour tout point M, $\vec{MM} = \vec{0}$.

2. Le Vecteur Opposé

L'opposé du vecteur $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même norme, mais un sens contraire.

Notation : $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

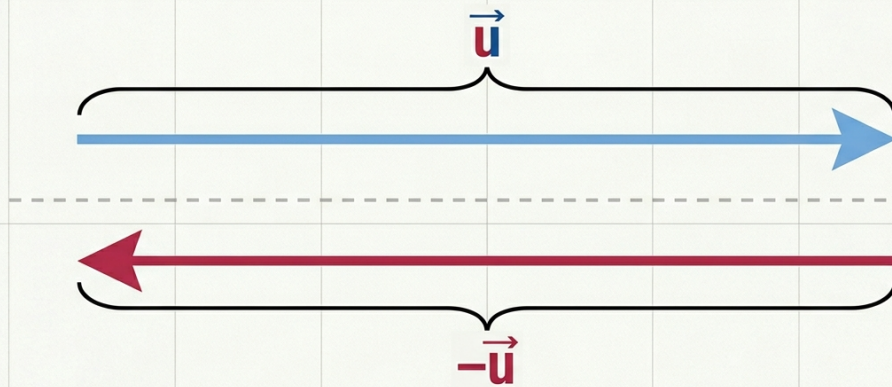
Relation : $\vec{w} + -\vec{w} = \vec{0}$.

3. Soustraction de vecteurs

Soustraire un vecteur revient mathématiquement à ajouter son opposé.

Formule : $\vec{w} - \vec{u} = \vec{w} + (-\vec{u})$.

Vecteurs Opposés



Les deux flèches ont la même longueur et sont parallèles. La flèche vers la droite est $\vec{u}$ (Bleu), celle vers la gauche est $-\vec{u}$ (Rouge). Elles sont opposées.

VI. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1. Produit par un scalaire

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un nombre réel k (appelé scalaire). Le produit $k\vec{u}$ est un nouveau vecteur défini:

Direction : identique à celle de $\vec{u}$.

Sens : identique à $\vec{u}$ si $k \geq 0$; contraire à $\vec{u}$ si $k \leq 0$.

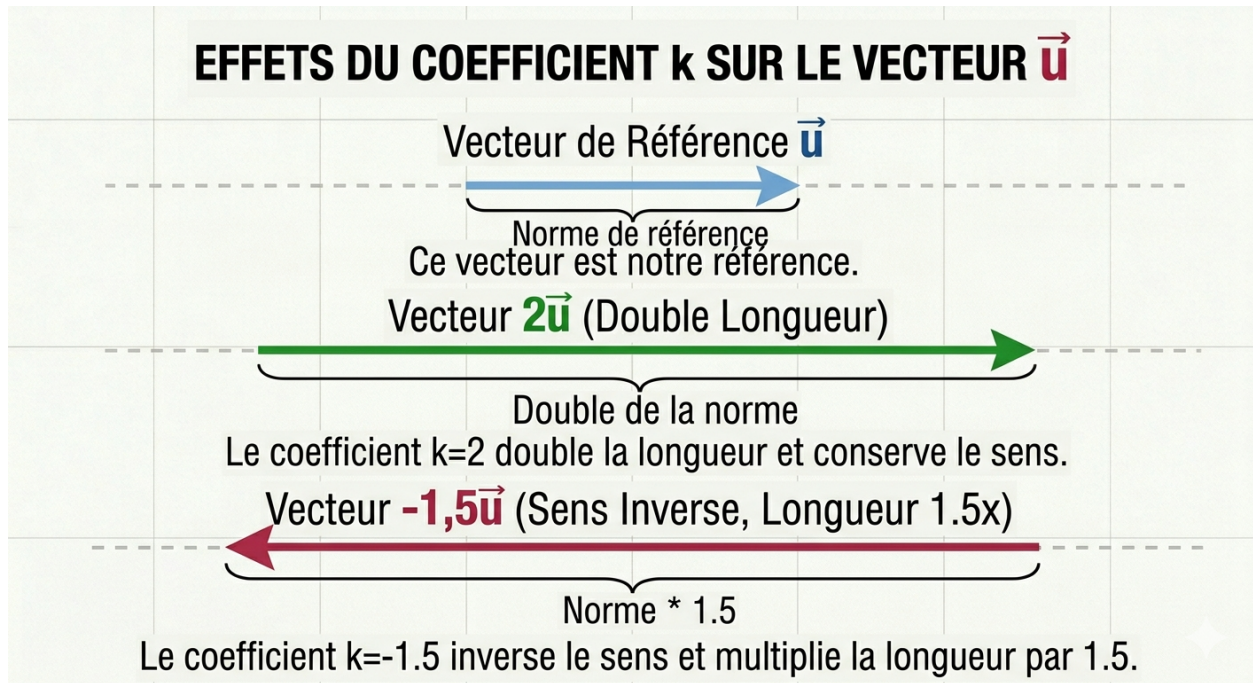
Norme : la longueur est multipliée par la valeur absolue de

$$||k\vec{u}|| = |k| \cdot ||\vec{u}||.$$

2. Règles de calcul (Distributivité)

Pour tous réels k et m tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$, on a :

$$k(\vec{w} + \vec{u}) = k\vec{w} + k\vec{u}$$



VII. GÉOMÉTRIE REPÉRÉE : BASES ET REPÈRES

1. Base du plan

On appelle base du plan tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction (non colinéaires).

Base orthogonale : si les directions de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires.

Base orthonormée : si elle est orthogonale et que $||\cdot||$.

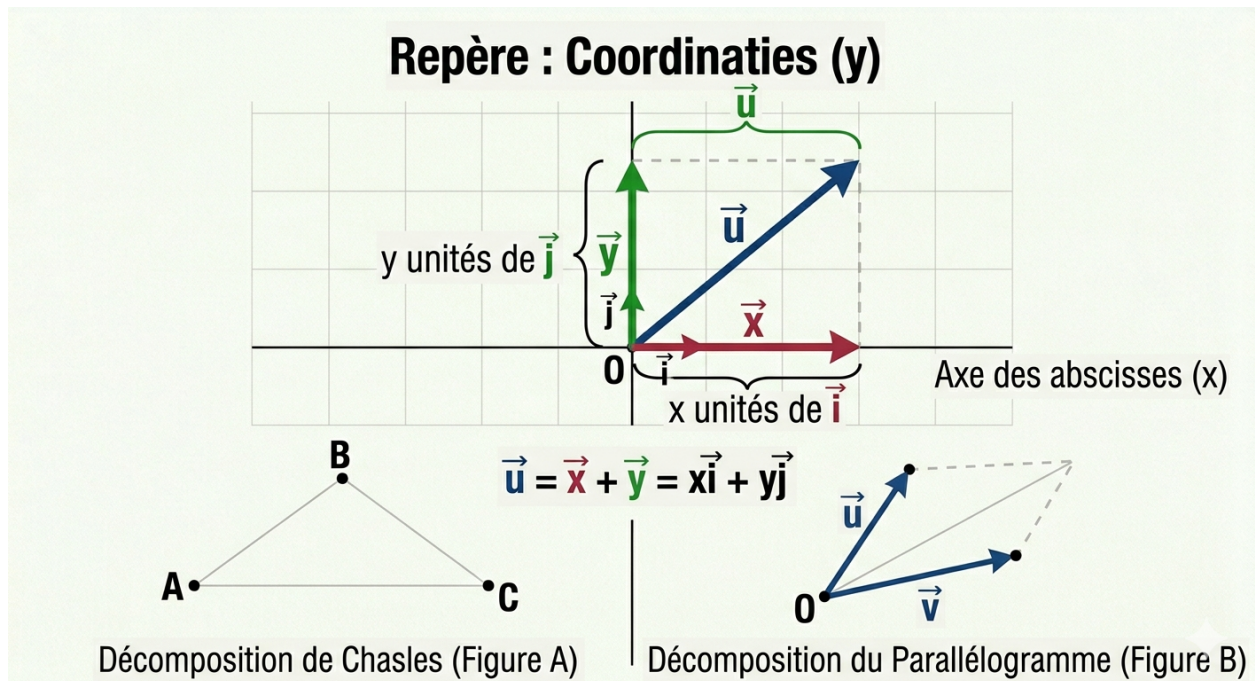
2. Décomposition d'un vecteur Théorème

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Les nombres x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base.

3. Notion de Repère

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la donnée d'un point fixe O (l'origine) et d'une base.



VIII. CALCULS ANALYTIQUES ET COORDONNÉES

1. Coordonnées d'un vecteur à partir de deux points dans un repère

On a les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ Alors le vecteur a pour coordonnées

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Règle mnémotechnique : Coordonnées de l'extrémité moins coordonnées de l'origine.

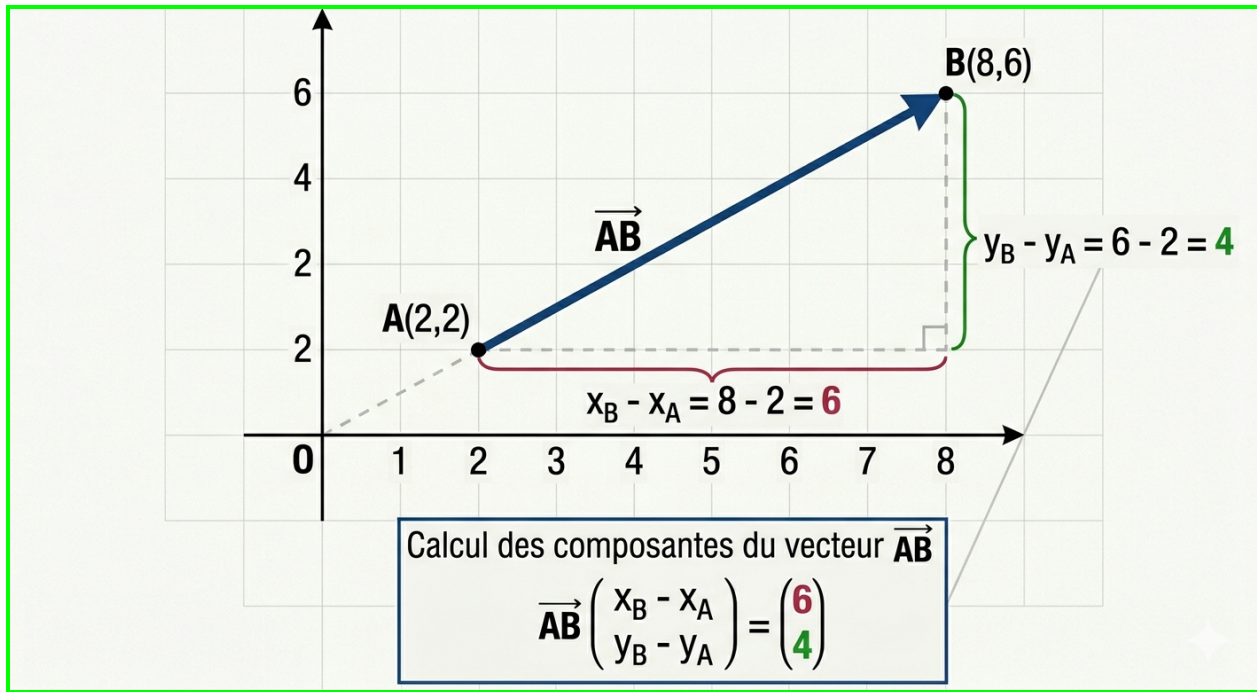
2. Coordonnées du milieu

Le milieu I d'un segment [AB] a pour coordonnées la moyenne arithmétique des coordonnées des extrémités : $x_I = (x_A + x_B)/2$ et $y_I = (y_A + y_B)/2$.

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{w}(l, k)$ on a :

Somme : $(\vec{u} + \vec{w})$ a pour coordonnées $(x + l, y + k)$.

Produit par k : $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky) .



X. NORME ET DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

1. Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x, y)$ se calcule par la formule issue du théorème de Pythagore $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Distance entre deux points

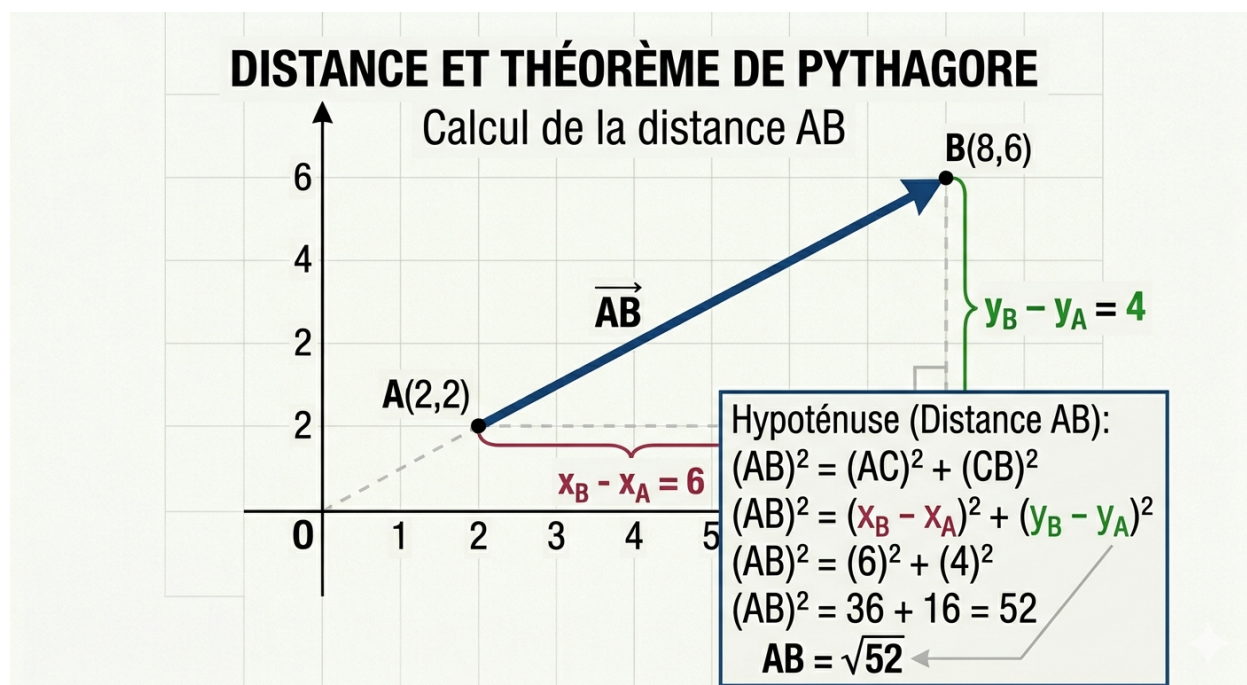
La distance entre deux points A et B correspond à la norme du vecteur $\vec{AB}$.

Dans un repère orthonormé, elle vaut $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Attention : Cette formule est fausse si le repère n'est pas orthonormé.

3. Lien avec le théorème de Pythagore

Le déplacement horizontal x et y vertical forment les deux côtés de l'angle droit d'un triangle dont le vecteur est l'hypoténuse 77, 89, 91.



X. COLINÉARITÉ, DÉTERMINANT ET APPLICATIONS

1. Définition de la colinéarité

Des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils possèdent la même direction .

Condition mathématique : Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

2. Le Déterminant (Critère analytique)

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Le déterminant de ces deux vecteurs est le nombre $xy' - x'y$

Propriété cruciale : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.