

Chapitre 7 : Droite et cercle

Durée du chapitre selon le programme scolaire : 3 semaines (12 heures de cours)

Objectif général : L'apprenant doit être capable de **modéliser des problèmes géométriques par des outils algébriques** (équations de droites et de cercles) et d'utiliser le **cercle trigonométrique** pour faire le lien entre mesures d'angles et coordonnées de points.

Nom du créateur : Equipe maths

Date de création : Avril 2026

Sources de documents :

- www.maths-et-tiques.fr 1, 2.
- [Cours complet \(Yvan Monka\)](#)
- Galilee.ac, Afterclasse 5, 6.

II. Le cercle trigonométriques et l'orientation plan.....	4
III. Angle Orienté des vecteurs et mesure principale.....	6
IV. Fonction sinus et cosinus.....	8
V. Géométrie analytique : équations des cercles.....	13

Mathématiques Seconde

I. INTRODUCTION, HISTOIRE ET APPROCHE PHYSIQUE

1. Origine historique de la notion

La trigonométrie (du grec *trigonos* « triangle » et *metron* « mesure ») n'a pas toujours utilisé le cercle. À l'origine, chez les Grecs (Hipparque) et les Indiens, elle servait à calculer des **cordes** dans un cercle pour les besoins de l'**astronomie**. Ce sont les mathématiciens arabes et persans qui ont perfectionné le concept de sinus et introduit les fonctions telles que nous les connaissons. Le passage de l'étude du triangle rectangle (collège) à l'étude du cercle (lycée) marque la transition vers l'analyse moderne.

2. L'approche par physique

En physique, la droite n'est pas juste un alignement de points infinis ; c'est la trace d'un mouvement parfait et sans entrave.

- **L'analogie du faisceau laser ou de la sonde spatiale** : Imaginez une sonde spatiale voyageant dans le vide absolu de l'espace, loin de toute planète. Selon le principe d'inertie (première loi de Newton), si aucune force ne s'exerce sur elle, elle continue sa course indéfiniment en ligne droite et à vitesse constante.
- **L'approche mathématique par la physique** : * **La direction** : C'est la trajectoire de la sonde (l'axe du mouvement). **L'origine et le vecteur directeur** : Pour définir cette droite, il suffit de connaître la position de

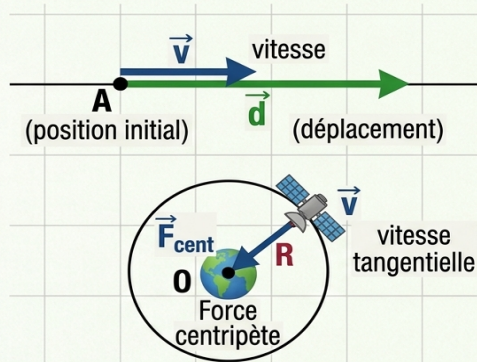
la sonde à un instant $t=0$ (un point A) et sa vitesse (un vecteur $\vec{u}$).
Chaque point M de la droite correspond à la position de la sonde à un instant donné, modélisé par l'équation vectorielle :

$$\vec{AM} = t \cdot \vec{u}$$

Le cercle représente l'équilibre parfait entre une vitesse de déplacement et une force qui retient l'objet vers un centre.

- **L'analogie du frondeur ou du satellite** : Imaginez que vous faites tourner une bille attachée au bout d'une ficelle. La bille veut naturellement partir en ligne droite (à cause de l'inertie), mais la ficelle exerce une tension continue qui la ramène vers votre main. C'est exactement le même principe pour la Lune en orbite autour de la Terre : la force de gravitation joue le rôle de la ficelle.
- **L'approche mathématique par la physique** :
Le Centre (O) : C'est le point d'attache (votre hand, ou le centre de la Terre). C'est là d'où part la force dite "centripète".
Le Rayon (R) : C'est la longueur de la ficelle. En physique, cela représente une distance d'équilibre constante. Tant que la tension est stable, la distance ne varie pas.
L'équation du cercle : Si on place ce système dans un repère, la distance entre le centre $O(x_0, y_0)$ et l'objet $M(x, y)$ est toujours égale à R. Physiquement, l'invariance du rayon traduit la conservation de la distance par rapport au centre de force.

Approche Physique : Droite et Cercle



Mouvement Rectiligne (La Droite)

Analogie de la Sonde Spatiale : Sans force extérieure, un objet **conserve sa trajectoire rectiligne**.

Le mouvement rectiligne uniforme modélise une droite.

Équation (avec position x_0): $x(t) = v \cdot t + x_0$
C'est une fonction affine.

Mouvement Circulaire (Le Cercle)

Analogie du Satellite : Une force centrale (gravité ou tension) courbe continuellement la trajectoire en un cercle.

Équation (dans le plan, centrée sur l'origine):
 $x^2 + y^2 = R^2$. Distance au centre constante.



Figures d'Inertie (Rectiligne) - Conservation de la Direction



Figures de Centration (Circulaire) - Invariance du Rayon

II. Le cercle trigonométriques et l'orientation plan

1. Le Radian (une nouvelle unité de mesure)

Jusqu'à présent, les angles étaient mesurés en degrés. En seconde, nous introduisons le radian, une unité de mesure plus adaptée aux calculs mathématiques et aux fonctions.

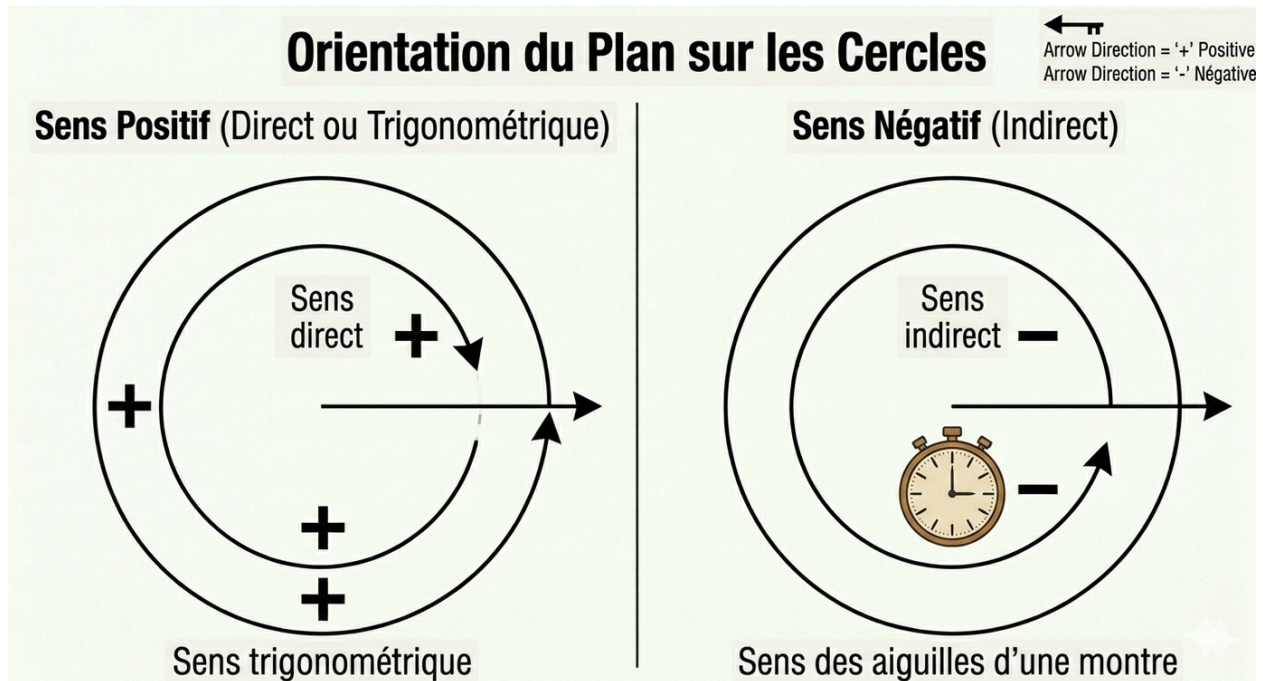
Définition formelle : Sur un cercle C de centre O et de **rayon 1**, la mesure en radians d'un angle géométrique $\widehat{AOB}$.

est égale à la **longueur de l'arc** AB intercepté par cet angle. Comme le périmètre total d'un cercle de rayon 1 est égal à 2π , nous en déduisons la correspondance fondamentale : **$180^\circ = \pi$ radians**.

2. Orientation du plan

On oriente le plan en choisissant un sens de parcours sur tous les cercles :

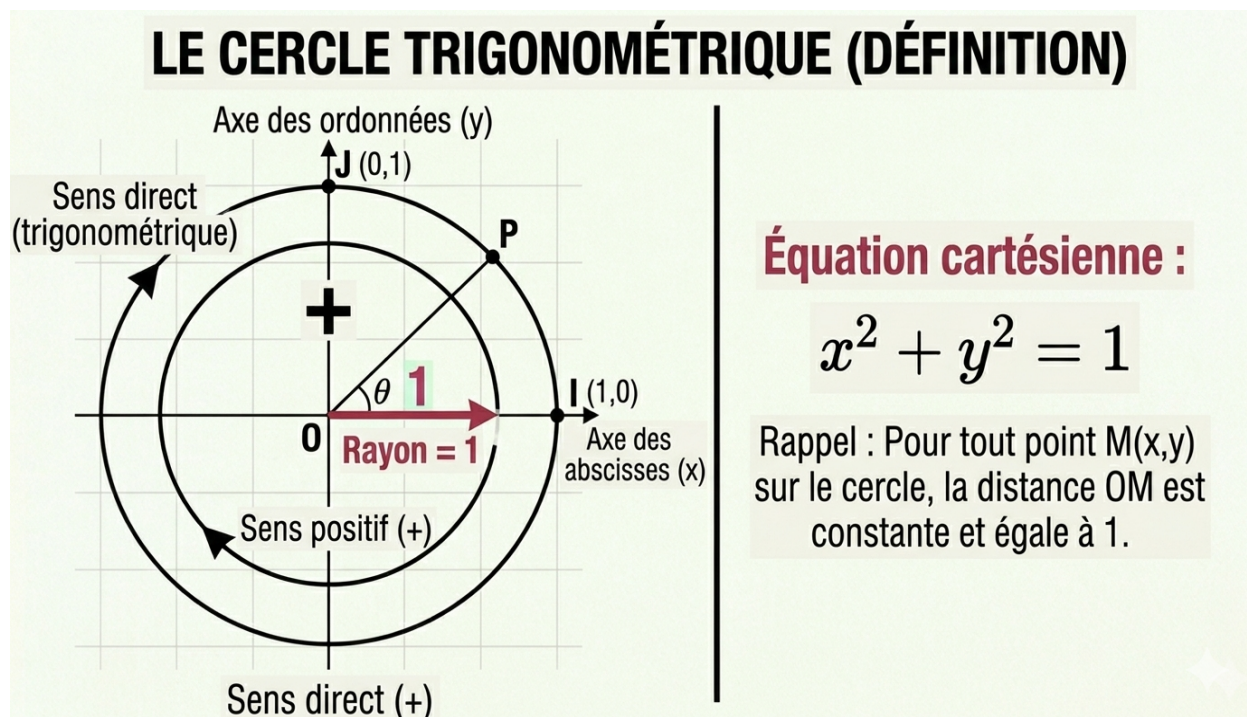
- **Sens positif (direct ou trigonométrique)** : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- **Sens négatif (indirect)** : le sens des aiguilles d'une montre



3. Définition de cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle de **rayon 1**, centré sur l'origine du repère (O, I, J) , et **orienté dans le sens direct**. Son équation cartésienne est

$$x^2 + y^2 = 1$$



III. Angle Orienté des vecteurs et mesure principale

1. Enroulement de la droite réelle

À tout nombre réel x , on peut associer un point unique M sur le cercle trigonométrique en "enroulant" la droite numérique autour du cercle. Cependant, plusieurs réels peuvent correspondre au même point : si x est une mesure de l'angle, alors tous les nombres de la forme $x + 2k\pi$ (où k est un entier relatif) sont aussi des mesures de cet angle

Parmi l'infinité de mesures possibles, il en existe une seule située dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$. On l'appelle la **mesure principale**.



Enroulement de la Droite et Mesures multiples

À tout réel x , un point M unique. Cependant, M peut être associé à $x + 2k\pi$ (k entier relatif).

$x^2 + y^2 = 1$	Angle = $x + 2k\pi$	
	Angle = $x + 2k\pi$	$-k + k < k$

DÉFINITION : Mesure Principale

Parmi l'infinité de mesures possibles, il en existe une seule située dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$. C'est le chemin le plus direct depuis l'origine, sans dépasser

Point M à $\pi/2$

Point M à $5\pi/2$

 $\uparrow \pi_A$

Mesure principale = $\pi/2$

Une mesure = $5\pi/2$,
Mesure principale = $\pi/2$

Zone verte = Mesure Positive.
Zone rouge = Mesure Négative.

Méthode de calcul : Pour un angle comme $\frac{25\pi}{4}$, on cherche le multiple de 2π le plus proche pour ramener la valeur dans l'intervalle voulu.

Exemple : $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi$, donc la mesure principale est $\frac{\pi}{4}$

IV. Fonction sinus et cosinus

1. Définition géométrique

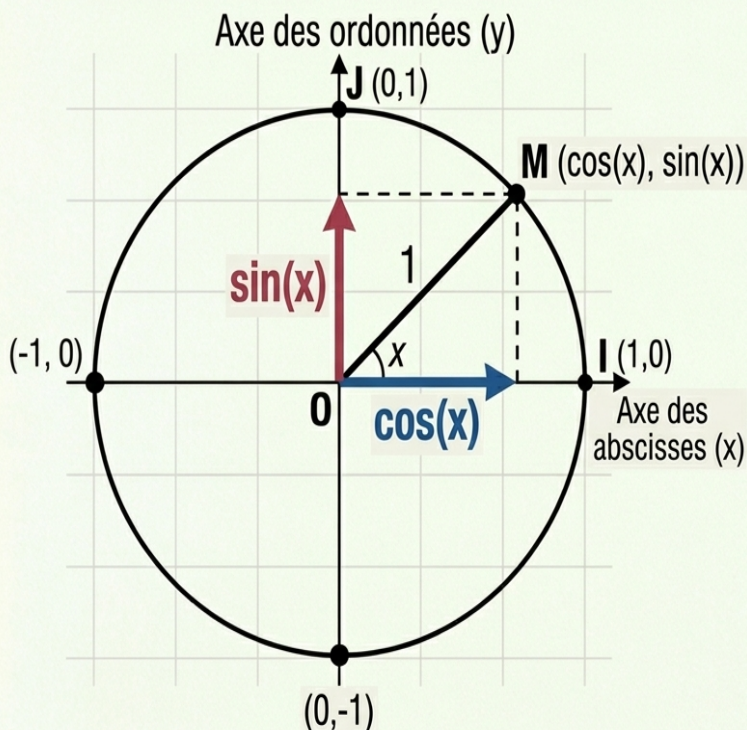
Soit M le point image du réel x sur le cercle trigonométrique dans le repère (O, I, J) .

Les coordonnées du point M sont $M(\cos(x), \sin(x))$. Cela signifie que :

- $\cos(x)$ représente l'abscisse du point M.
- $\sin(x)$ représente l'ordonnée du point M.

Ainsi, lorsque l'angle x varie, le point M se déplace sur le cercle trigonométrique et ses coordonnées changent selon les valeurs du cosinus et du sinus.

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET COORDONNÉES DU POINT M(x)



DÉFINITION DES COORDONNÉES

Définition du Cosinus et du Sinus

Pour tout réel x , point image M sur le cercle :

- $\cos(x)$ est l'abscisse (position sur l'axe x).
- $\sin(x)$ est l'ordonnée (position sur l'axe y).

$$x^2 + y^2 = 1$$

Vérification :

M($\cos(x)$, $\sin(x)$) est sur le cercle de rayon 1.

$$(\text{abscisse})^2 + (\text{ordonnée})^2 = R^2$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Variation de M : Lorsque l'angle x change, M se déplace sur le cercle et ses coordonnées changent continuellement.

2. Propriétés fondamentales

Encadrement : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Sur le cercle trigonométrique, le point M associé au réel x a pour coordonnées :

$M(\cos(x), \sin(x))$ or le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré en O.

Ainsi l'abscisse d'un point du cercle ne peut pas dépasser 1 ni être inférieure à -1 ,

de même pour l'ordonnée . Donc : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Identité pythagoricienne : Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x . Dans le repère orthonormé (O,I,J), les coordonnées de M sont : $M(\cos(x), \sin(x))$.

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O et de rayon 1. Donc $OM=1$

Or, dans un repère orthonormé, la distance entre O(0,0) et

$M(\cos(x), \sin(x))$ vérifie : $OM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

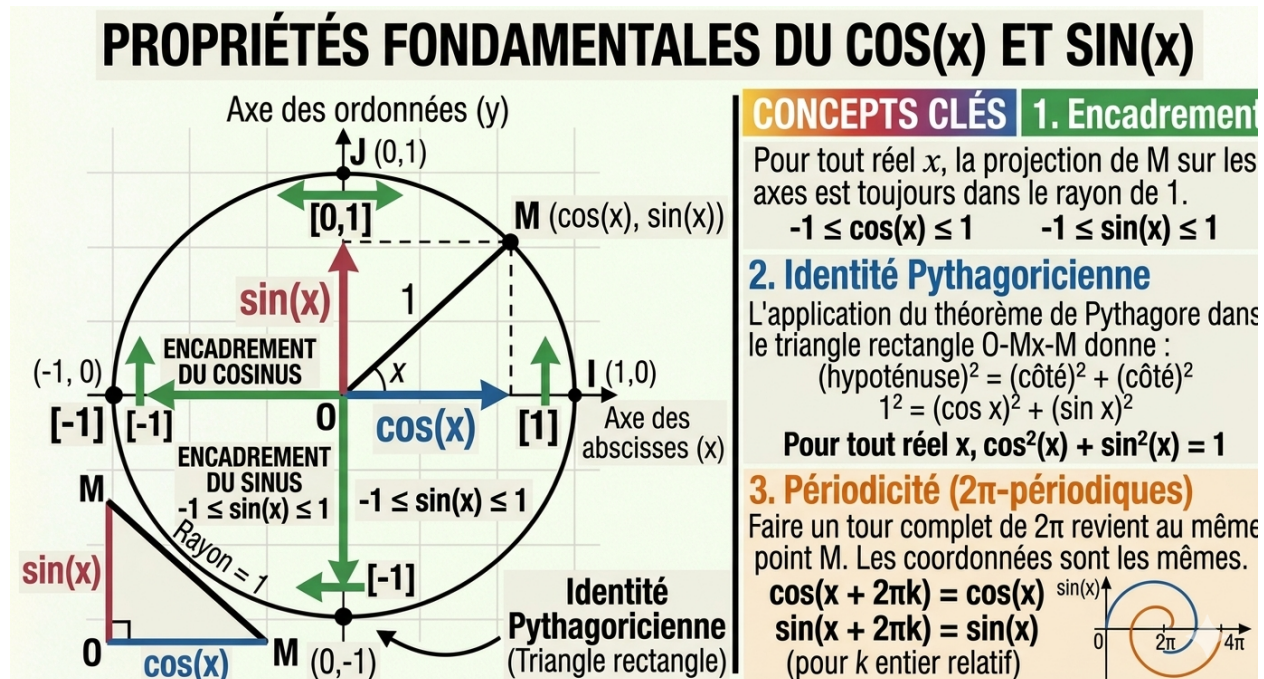
Comme $OM = 1$ alors : $OM^2 = 1$

Périodicité : Les fonctions sont 2π -périodiques, soit $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$
 $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Sur le cercle trigonométrique, un réel x correspond à un point M . Ajouter 2π à x signifie effectuer un tour complet sur le cercle :

$x \rightarrow x + 2\pi$ Or, après un tour complet, on revient exactement au même point M.

Ainsi, les coordonnées du point ne changent pas. Comme : le cosinus est l'abscisse du point, le sinus est l'ordonnée du point, on obtient : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



3. Angles Associés (symétrie)

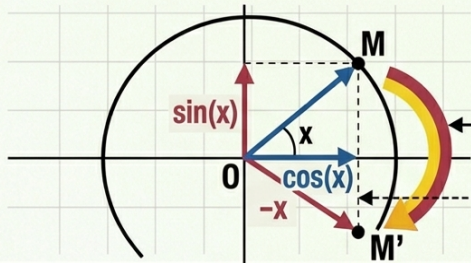
Ces relations permettent de transformer un angle quelconque en un angle du premier quadrant afin de faciliter les calculs de sinus et de cosinus.

Angles opposés

Lorsque l'on remplace x par $-x$, le point obtenu est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

On obtient alors : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

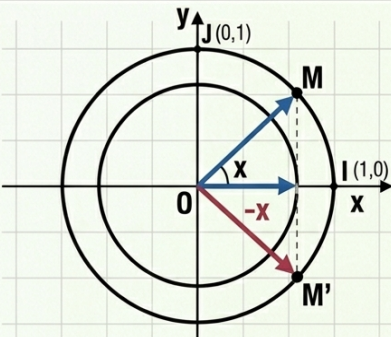
CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET EFFET DE LA SUBSTITUTION (x vs -x)



EFFET DE LA SUBSTITUTION $x \rightarrow -x$

Substituer x par $-x \rightarrow$ Rotation de x dans le **SENS HORAIRE**

Symétrie par rapport à l'Axe des Abscisses



CONSÉQUENCES SUR LES COORDONNÉES

Substituer x par $-x$ dans $M(\cos x, \sin x)$:

- L'abscisse (axe des x) reste **INCHANGÉE**.
Donc, **$\cos(-x) = \cos(x)$ [IDENTIQUE]**
- L'ordonnée (axe des y) devient l'**OPPOSÉE**.
Donc, **$\sin(-x) = -\sin(x)$ [OPPOSÉ]**

Équation cartésienne :

$\cos(x)$	$= \cos(x)$
$= \cos(x)$	[IDENTIQUE]
$\sin(-x)$	$= -\sin(x)$
$= -\sin(x)$	[OPPOSÉ]

Points Clés
Nano Banana

Substitution de x par $-x$:

1. Symétrie Horizontale de M
2. Abscisse identique, Ordonnée inversée
3. Résultat vectoriel : $M' = (\cos x, -\sin x)$



Interprétation

- Le cosinus ne change pas : la fonction cosinus est paire.
- Le sinus change de signe : la fonction sinus est impaire.

Angles supplémentaires

Les angles x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On a : $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

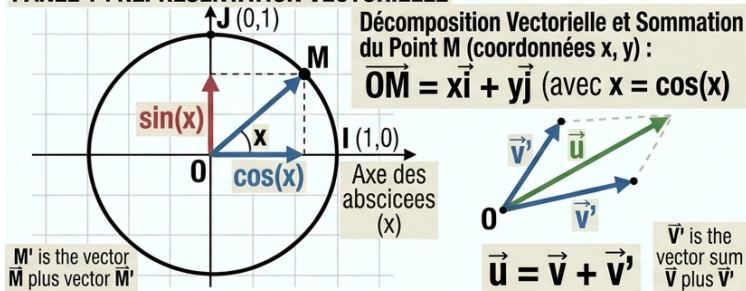
Interprétation

- Le cosinus change de signe.
- Le sinus conserve la même valeur.

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE, DÉCOMPOSITION VECTORIELLE & RÉDUCTION D'ANGLE

PANEL 1 : REPRÉSENTATION VECTORIELLE

(SYNTHÈSE PÉDAGOGIQUE)



SYNTHÈSE DES CONCEPTS CLÉS (RÉDUCTION ET IDENTITÉS)

1. IDENTITÉS ET ÉQUATION

L'identité pythagoricienne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ est vérifiée car M est sur un cercle de rayon 1. L'équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$.

2. RÉDUCTION D'ANGLE (SUBSTITUTION)

Substitution $x \rightarrow -x$: Symétrie horizontale. Les angles sont symétriques.

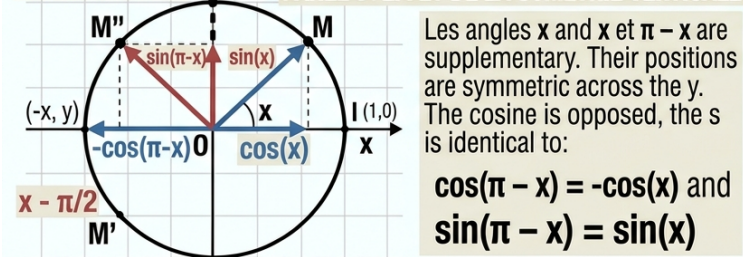
$\cos(-x) = \cos(x)$ and $\sin(-x) = -\sin(x)$. Ce panel est illustré par la rotation.

3. SOMMATION ET RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

4. SYMÉTRIE SUPPLÉMENTAIRE (VERTICALE)

Illustrée par le nouveau panel. Points de même ordonnée, abscisses opposées. Valide la relation $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

NOUVEAU PANEL: PANEL 3: EFFET DE LA SYMÉTRIE VERTICALE



Symétrie par rapport à l'origine

Ajouter π à un angle revient à effectuer un demi-tour sur le cercle trigonométrique.

Le point image devient alors le symétrique par rapport à l'origine.

Ainsi : $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Interprétation

Les deux coordonnées changent de signe.

Angles complémentaires

Les angles $\frac{\pi}{2} - x$ sont appelés angles complémentaires.

Sur le cercle trigonométrique, cela revient à échanger les coordonnées du point.

On obtient : $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Interprétation

- Le cosinus devient le sinus.
- Le sinus devient le cosinus.

V. Géométrie analytique : équations des cercles

La trigonométrie rejoint l'algèbre grâce à l'étude du cercle dans le plan cartésien.

Les coordonnées des points du cercle permettent de relier les notions géométriques aux équations algébriques.

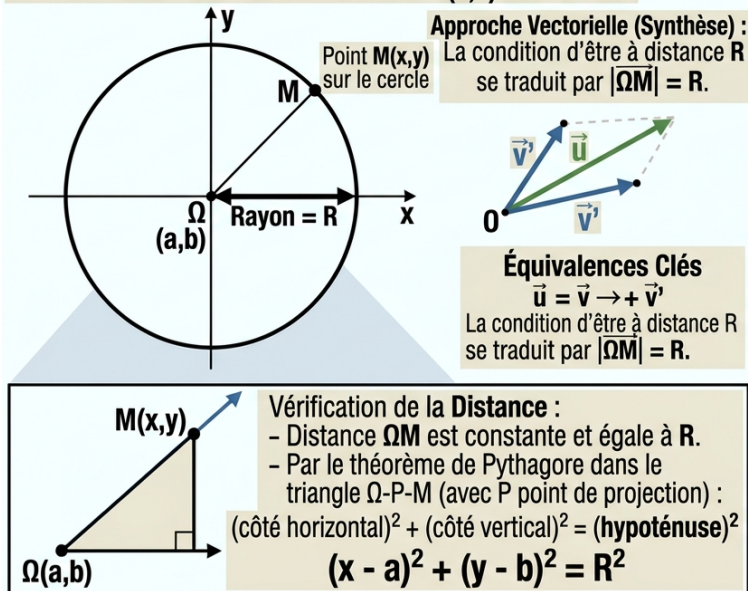
1. Équation Canonique de cercle

L'ensemble des points $M(x, y)$ situés à une distance constante R d'un point fixe $\Omega(a, b)$ forme un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R . Son équation est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

DÉFINITION GÉNÉRALE D'UN CERCLE ET SON ÉQUATION CARTÉSIENNE

PANEL GÉNÉRAL : CERCLE DE CENTRE $\Omega(a,b)$ ET RAYON R



SYNTHÈSE ET COMPARAISON (UNITAIRE vs GÉNÉRAL)

1. IDENTITÉS ET ÉQUATIONS

L'équation générale est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
Elle se réduit à $x^2 + y^2 = 1$ pour le cercle trigonométrique ($\Omega=(0,0)$, $R=1$).
L'identité pythagoricienne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ est un cas particulier de la distance unitaire.

2. RÉDUCTION ET SYMÉTRIE (Rappel)

Les transformations d'angles ($\cos(-x)$, $\sin(\pi-x)$, etc.) sont des opérations sur le cercle trigonométrique, mais les principes de symétrie (horizontale, verticale) s'appliquent à tout cercle par rapport à ses axes de symétrie passant par son centre.

3. SOMMATION ET RELATIONS (Rappel)

L'approche vectorielle ($\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}'$) et la décomposition ($\vec{OM}$) d' sont des outils puissants pour manipuler des positions. Pour tout cercle, la distance OM, mesurée par rapport à $O=(0,0)$, dépend de la position de Ω .

4. ÉTENDRE L'APPROCHE (Synthèse)

La vectorialisation et la sommation d' $\vec{\Omega v}$ peuvent être appliquées à $\vec{OM}$ pour analyser des mouvements ou des forces sur n'importe quel cercle.

2. Équation développée et complétion carré

Une équation de cercle peut aussi être écrite sous la forme développée :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

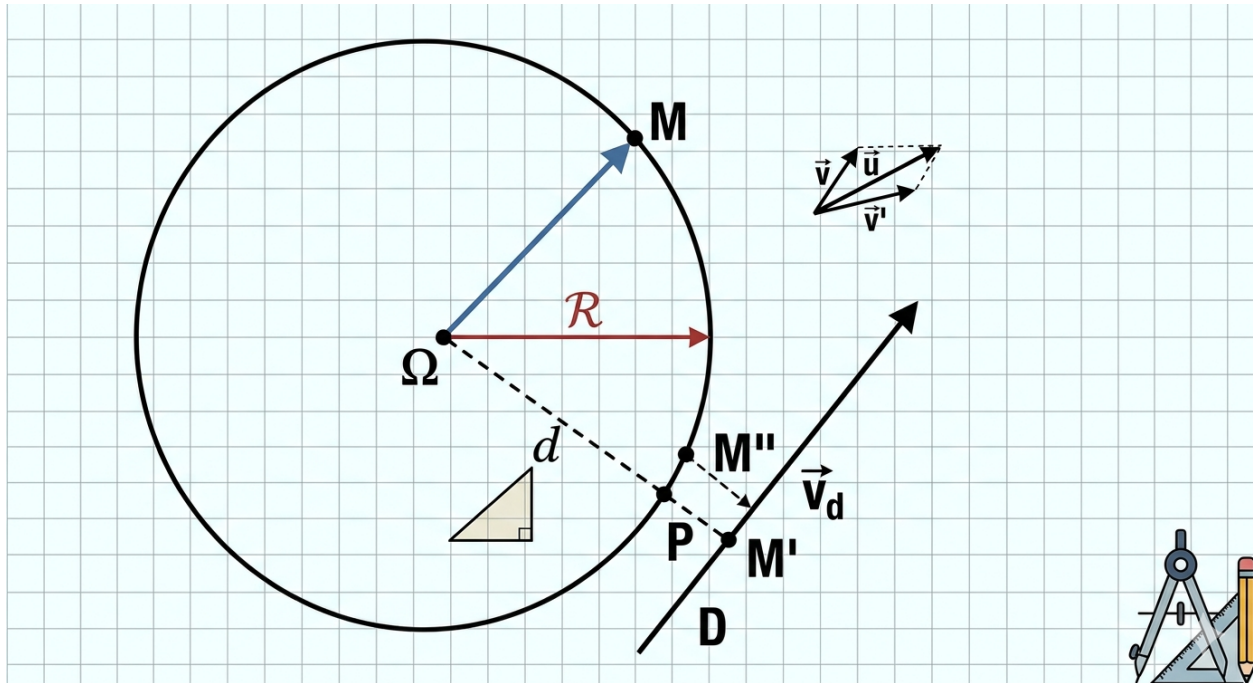
Pour retrouver le centre et le rayon, on transforme cette expression en forme canonique grâce à la complétion du carré.

3. Position relative d'une droite par rapport cercle

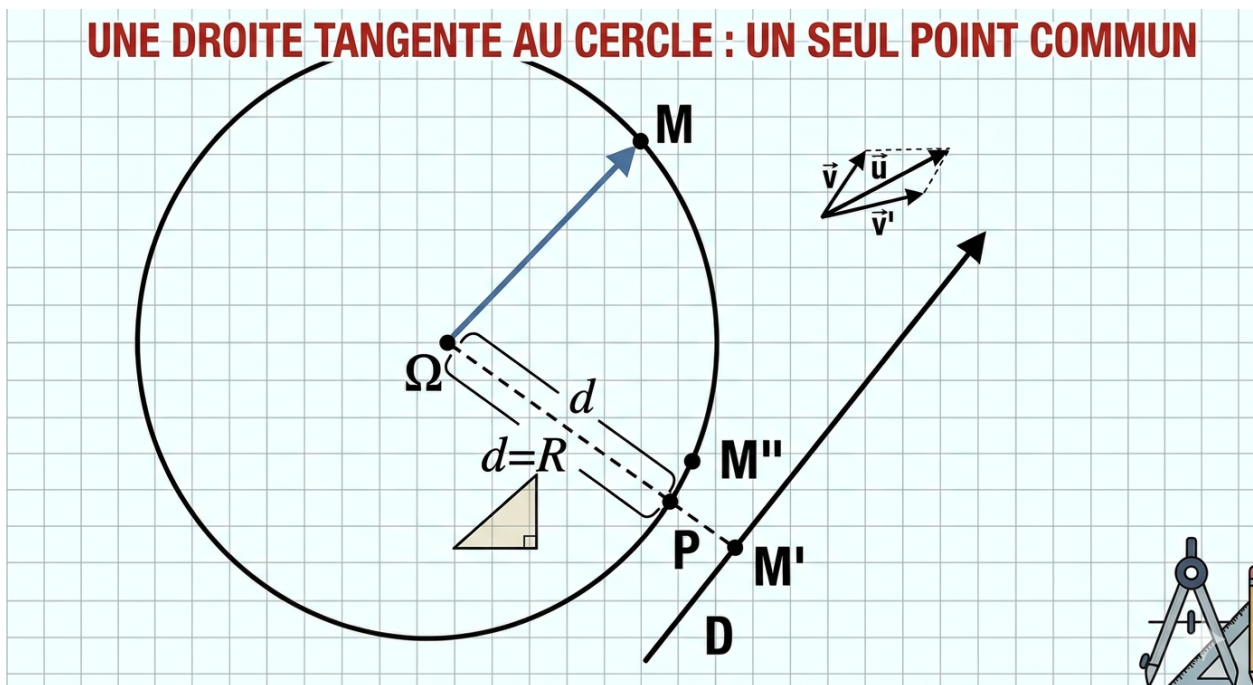
Considérons un cercle de rayon R et une droite. On note d la distance entre le centre du cercle et la droite. Trois situations sont possibles.

Aucun point commun Si : $d > R$

La droite est extérieure au cercle. Elle ne coupe pas le cercle.

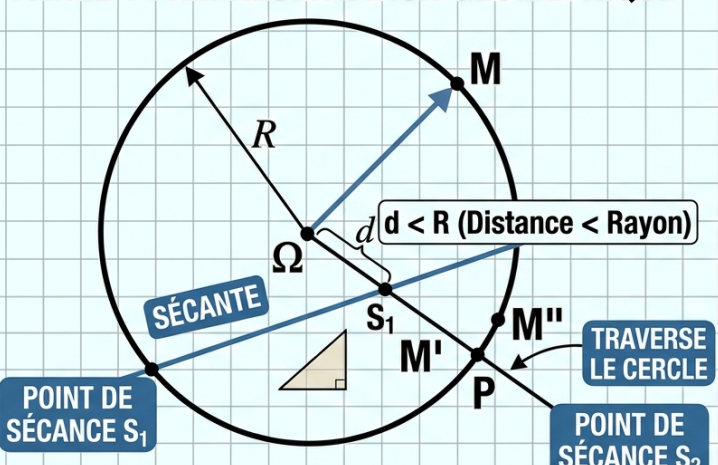
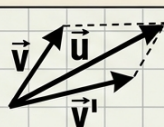


Un seul point commun : tangente Si : $d=R$
 La droite touche le cercle en un unique point.
 La droite est alors tangente au cercle.



Deux points communs : sécante Si : $d < R$

La droite traverse le cercle. Elle coupe le cercle en deux points : la droite est sécante.

UNE DROITE SÉCANTE AU CERCLE : DEUX POINTS COMMUNS	
PANEL 1 : REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE  $d < R$ (Distance < Rayon) SÉCANTE POINT DE SÉCANCE S_1 POINT DE SÉCANCE S_2 TRAVERSE LE CERCLE La distance entre le centre et la droite est inférieure au rayon. $d < R$.	PANEL 2 : APPROCHE VECTORIELLE  SYNTHÈSE DES CONCEPTS CLÉS 2. RÉDUCTION D'ANGLE (SUBSTITUTION) La distance entre le rédicentre et la droite est inférieure au distnagmen (inférieur. $d < R$). 3. SOMMATION ET RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES La distance entre dorar et relations trigonométriques. 