

Chapitre 3 : Calcul dans $\mathbb{R}$

Durée du chapitre selon le programme scolaire : 4 semaines (16 heures de cours)

Objectif général : L'apprenant doit maîtriser les opérations fondamentales sur

les nombres réels, y compris les puissances, les racines carrées, le calcul littéral, les identités remarquables, la manipulation des inégalités, la valeur absolue. Il doit être capable de simplifier des expressions complexes et résoudre des problèmes variés.

Nom du créateur : Equipe maths

Date de création : Avril 2026

Sources de documents :

- https://math.libretexts.org/Courses/Highline_College/MATHP_141%3A_Corequisite_Precalculus/02%3A_Algebra_Support/2.01%3A_Real_Numbers_Linear_Inequalities_and_Interval_Notation
- <http://nolotv.free.fr/2026/chap1.pdf>
- https://www.maths-et-tiques.fr/telech/1_Ensembles_nombres.pdf
- <https://www.purplemath.com/modules/absineq.htm>
- https://uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/12/12_2017_12_08!08_16_16_PM.pdf

I. Introduction.....	3
II. Les puissances de 10.....	3
1. Définition.....	3
2. Propriétés de puissance de 10.....	4
III. La notation scientifique.....	4
1. Définition.....	4
IV. Ecriture fractionnaire.....	5
1. Définition.....	5
2. Simplification d'une fraction.....	5
3. Egalité des fractions.....	5
4. Addition et soustraction de fractions.....	5
5. Multiplication de fractions.....	6
6. Division de fractions.....	6
V. La droite numérique.....	6
1. Définition.....	6
2. Les intervalles.....	7
VI. Union ($\cup$) et intersection ($\cap$).....	8
1. Définition.....	8
2. Représentation graphique de l'union et l'intersection.....	9
VII. Relation d'ordre.....	9
1. Définition.....	9
2. Opérations et ordre.....	10
VIII. Majorant, minorant, maximum et minimum.....	11
1. Majorant et minorant.....	11
2. Maximum et minimum.....	11
3. Maximum et minimum.....	12
IX. Valeur absolue.....	13
1. Définition.....	13
2. Définition algébrique.....	13
3. Propriétés fondamentales.....	13
X. Distance.....	15
1. Définition.....	15
2. Propriété de la distance.....	15
XI. Approximation décimale d'ordre N.....	16
1. Définition.....	16
XII. Troncature.....	17
1. Définition.....	17

Mathématiques Seconde

I. INTRODUCTION, HISTOIRE ET APPROCHE PHYSIQUE

1. Origine historique de la notion

Le calcul dans $\mathbb{R}$ n'a pas toujours été aussi systématique qu'aujourd'hui.

Les Babyloniens utilisaient déjà des algorithmes de calcul pour résoudre des équations du second degré. Ils travaillaient en base 60 (système sexagésimal), ce qui explique pourquoi nous comptons encore les heures et les minutes en base 60. Les Grecs (Ve – IIIe siècle av. J.-C.)

Pythagore et son école ont découvert l'existence de grandeurs incommensurables, conduisant à la notion de nombres irrationnels. Euclide, dans ses "Éléments", a formalisé les règles du calcul géométrique.

Les mathématiciens arabes (IXe – XIIe siècle) Al-Khwarizmi (IXe siècle) a systématisé la résolution des équations et a introduit les notions d'algèbre (al-jabr). Son nom a donné le mot "algorithme". La révolution moderne (XVIe – XVIIe siècle)

- Les symboles + et - apparaissent en Allemagne au XVe siècle.
- Le symbole $\times$ est introduit par William Oughtred (1631).
- Le symbole $\sqrt{\quad}$ (racine carrée) vient du latin "radix" (racine).
- René Descartes (1637) introduit la notation a^2 , a^3 pour les puissances.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (XVIIe) formalise les règles du calcul littéral.

II. Les puissances de 10

1. Définition

10^n (10 puissance n) = 1 suivi de n zéros.

Exemples

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1000$

10^{-n} est l'inverse de 10^n .

Exemples

- $10^{-1} = 0.1$
- $10^{-2} = 0.01$
- $10^{-3} = 0.001$

2. Propriétés de puissance de 10

Propriete	Exemple
$10^n * 10^m = 10^{(n+m)}$	$10^7 * 10^3 = 10^{(10)}$
$10^n / 10^m = 10^{(n-m)}$	$10^7 / 10^3 = 10^{(4)}$
$10^{(n)^m} = 10^{(n*m)}$	$10^{(2)^3} = 10^6$
$10^{-n} = 1/10^n$	$10^{-1} = 0.1$

III. La notation scientifique

1. Définition

La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture sous la forme : $a * 10^p$, où $1 \leq |a| < 10$ et p est un entier relatif.

- a est appelé mantisse (ou significande)
- p est appelé exposant

Exemples

Nombre	Notation Scientifique	Explication
3000	$3 * 10^3$	$3 < 10, p = 3$
45000	$4,5 * 10^4$	$4,5 < 10, p = 4$
0.005	$5 * 10^{-3}$	$5 < 10, p = -3$

IV. Ecriture fractionnaire

1. Définition

Une fraction est un quotient de deux entiers : $\frac{a}{b}$, où a est le numérateur et b le dénominateur ($b \neq 0$).

2. Simplification d'une fraction

Pour simplifier une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD (Plus Grand Commun Diviseur).

Exemple : $12/18 = (12 \div 6)/(18 \div 6) = \frac{2}{3}$

3. Egalité des fractions

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a \times d = b \times c$.

Exemple : $2/3 = 4/6$ car $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$

4. Addition et soustraction de fractions

- Même dénominateur : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$

- Dénominateurs différents : on réduit au même dénominateur

Exemple : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

5. Multiplication de fractions

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$$

Exemple : $\frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

6. Division de fractions

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a * d}{b * c}$$

Exemple : $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$

V. La droite numérique

1. Définition

La droite numérique est une droite graduée sur laquelle chaque nombre réel correspond à un point unique et chaque point correspond à un nombre réel unique.

La droite numérique



2. Les intervalles

Un intervalle est un ensemble de nombres réels compris entre deux bornes.

Les types d'intervalles

Notation	Représentation
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$
$[a ; b[$	$a \leq x < b$
$[a ; +\infty[$	$x \geq a$
$]a ; b[$	$a < x < b$
$]a ; +\infty[$	$x > a$

Remarques

Les crochets tournés vers l'intérieur ($[$ ou $]$) indiquent que la borne est incluse. Les crochets tournés vers l'extérieur ($]$ ou $[$) indiquent que la borne est exclue.

VI. Union ($\cup$) et intersection ($\cap$)

1. Définition

- L'intersection de deux ensembles A et B (notée $A \cap B$) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
- L'union de deux ensembles A et B (notée $A \cup B$) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).

Exemple

Soit $A = [2 ; 7]$ et $B = [5 ; 10]$

- $A \cap B = [5 ; 7]$

- $A \cup B = [2 ; 10]$

Soit $C = [0 ; 5]$ et $D = [8 ; 12]$

- $C \cap D = \emptyset$ (ensemble vide, pas de points communs)

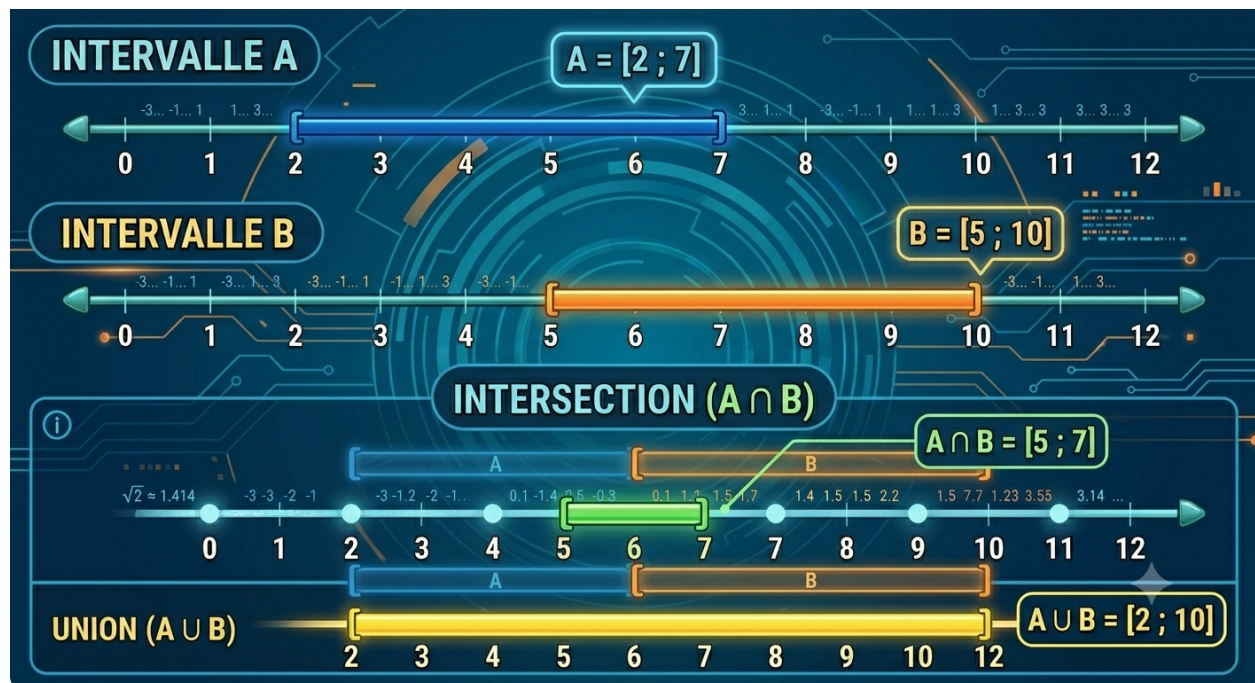
- $C \cup D = [0 ; 5] \cup [8 ; 12]$ (non connecté)

Soit $E =]-\infty ; 4]$ et $F = [2 ; +\infty[$

- $E \cap F = [2 ; 4]$

- $E \cup F =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$

2. Représentation graphique de l'union et l'intersection



VII. Relation d'ordre

1. Définition

La relation "inférieur ou égal" (notée $\leq$) est une relation d'ordre. Elle vérifie trois propriétés fondamentales :

Propriete	Definition
Reflexivité	Pour tout x , on a $x \leq x$
Anti-symétrie	Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$
Transitivité	Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$

Les symboles de comparaison

Symbole	Signification
$=$	égal à
$\neq$	différent de
$\leq$	inférieur ou égal à
$\geq$	supérieur ou égal à
$<$	strictement inférieur à

2. Operations et ordre

Règle 1 : Addition d'un même nombre

L'addition d'un même nombre ne change pas le sens de l'inégalité.

Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$

Exemple : $2 \leq 5 \rightarrow 2 + 3 \leq 5 + 3 \rightarrow 5 \leq 8$

Règle 2 : Multiplication par un nombre positif

La multiplication par un nombre positif conserve le sens de l'inégalité.

Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $a \times c \leq b \times c$

Exemple : $2 \leq 5 \rightarrow 2 \times 3 \leq 5 \times 3 \rightarrow 6 \leq 15$

Règle 3 : Multiplication par un nombre négatif

La multiplication par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.

Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geq b \times c$

Exemple : $2 \leq 5 \rightarrow 2 \times (-3) \geq 5 \times (-3) \rightarrow -6 \geq -15$

Règle 4 : Passage à l'inverse

Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b$

Si $a < 0$ et $b < 0$, alors $a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b$

Exemple : $2 < 5 \rightarrow 1/2 > 1/5$ ($0,5 > 0,2$)

VIII. Majorant, minorant, maximum et minimum

1. Majorant et minorant

Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Un nombre M est un majorant de X si pour tout $x \in X$, on a $x \leq M$.

- Un nombre m est un minorant de X si pour tout $x \in X$, on a $x \geq m$.

Une partie est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

$X = [0 ; 5]$

- Majorants : tous les nombres ≥ 5 ($5 ; 6 ; 7 ; \dots$)

- Minorants : tous les nombres ≤ 0 ($0 ; -1 ; -2 ; \dots$)

- X est bornée

$Y = [3 ; +\infty[$

- Majorants : aucun (l'ensemble n'est pas majoré)

- Minorants : tous les nombres ≤ 3

- Y n'est pas bornée (elle est minorée mais pas majorée)

$Z =]-\infty ; 10]$

- Majorants : tous les nombres ≥ 10

- Minorants : aucun

- Z n'est pas bornée (elle est majorée mais pas minorée)

Remarque importante :

- Un majorant (ou minorant) n'appartient pas forcément à l'ensemble.
- Il existe une infinité de majorants (et minorants) pour un ensemble donné.

2. Maximum et minimum

- Le maximum d'un ensemble X , noté $\max(X)$, est le plus grand élément de X .
C'est un majorant qui appartient à X .
- Le minimum d'un ensemble X , noté $\min(X)$, est le plus petit élément de X .
C'est un minorant qui appartient à X .

Différence entre majorant et maximum

	Majorant	Maximum
Définition	$x \leq M$ pour tout x de X	$\max(X) \in X$ et $x \leq \max(X)$
Appartient à X ?	Non nécessairement	Oui toujours
Quantité	Infinité des majorants (Si l'ensemble est borné)	Au plus un seul

Exemples

$$X = [0 ; 5]$$

- Maximum = 5 (appartient à X)
- Minimum = 0 (appartient à X)

$$Y =]0 ; 5[\text{ (ouvert) }$$

- Maximum : n'existe pas (5 n'est pas dans Y)
- Minimum : n'existe pas (0 n'est pas dans Y)
- Pourtant, Y a des majorants (5, 6, 7, ...) et des minorants (0, -1, -2, ...)

$$Z = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

- Maximum = 5

- Minimum = 1

$$W =]-\infty ; 10]$$

- Maximum = 10

- Minimum : n'existe pas

3. Maximum et minimum

- La borne supérieure d'un ensemble X (notée $\sup X$) est le plus petit des majorants de X .

- La borne inférieure d'un ensemble X (notée $\inf X$) est le plus grand des minorants de X .

Remarque

- Si le maximum existe, alors $\sup X = \max X$

- Si le minimum existe, alors $\inf X = \min X$

Exemple : $Y =]0 ; 5[$

- $\sup Y = 5$ (mais $5 \notin Y$)

- $\inf Y = 0$ (mais $0 \notin Y$)

IX. Valeur absolue

1. Définition

La valeur absolue d'un nombre réel a , notée $|a|$, est la distance entre a et 0 sur la droite numérique.

2. Définition algébrique

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0$$

$$|a| = -a \text{ si } a \leq 0$$

Exemples :

$$|5| = 5 \text{ (car } 5 \geq 0)$$

$$|-5| = 5 \text{ (car } -5 < 0, \text{ donc } |-5| = -(-5) = 5)$$

$$|0| = 0$$

$$|\pi| = \pi$$

$$|-3,14| = 3,14$$

3. Propriétés fondamentales

$$|a| \geq 0 \text{ (toujours positif ou nul)}$$

Exemple

$$|x| \text{ est toujours } \geq 0$$

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Exemple

$$|x| = 0 \text{ seulement si } x = 0$$

$$|a| = |-a|$$

Exemple

$$|5| = |-5|$$

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

Exemple

$$|-2 \times 3| = |-2| \times |3| = 2 \times 3 = 6$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ (} b \neq 0 \text{)}$$

Exemple

$$|-6/3| = |-6| / |3| = 6/3 = 2$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Exemple

$$|5 + (-3)| \leq |5| + |-3| \rightarrow 2 \leq 8$$

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Exemple

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

X. Distance

1. Définition

La distance entre deux nombres réels a et b sur la droite numérique est donnée

par la valeur absolue de leur différence :

$$d(a,b) = |b - a| = |a - b|$$

2. Propriété de la distance

Propriete	Signification
$d(a,b) \geq 0$	Une distance est toujours positive
$d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$	La distance est nulle seulement si $a = b$
$d(a,b) = d(b,a)$	La distance est symétrique
$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$	Inégalité triangulaire

Exemple

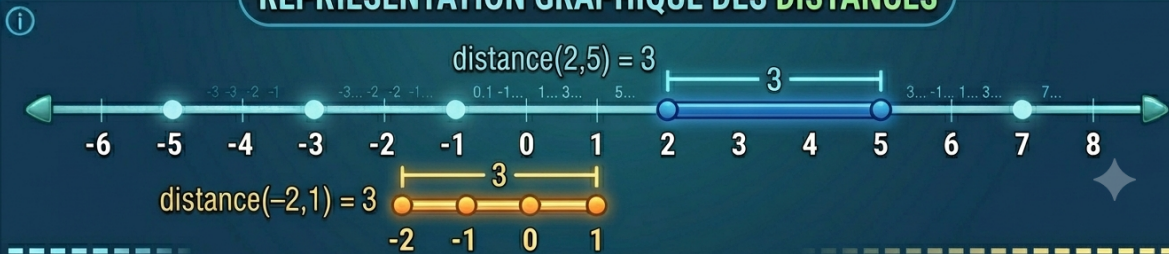
CALCUL ET REPRÉSENTATION DE DISTANCES SUR LA DROITE NUMÉRIQUE

DISTANCES CALCULÉES



- Distance entre 3 et 7 : $|7 - 3| = |4| = 4$
- Distance entre -2 et 5 : $|5 - (-2)| = |7| = 7$
- Distance entre -5 et -1 : $|-1 - (-5)| = |4| = 4$

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES DISTANCES



XI. Approximation décimale d'ordre N

1. Définition

Une approximation décimale d'ordre n (ou à 10^{-n} près) d'un nombre réel x est un nombre décimal qui approche x avec une erreur inférieure à 10^{-n} .

On distingue deux types d'approximations :

Type	Définition
Par Defaut	Le plus grand décimal $\leq x$ avec n chiffres après la virgule
Par excès	Le plus petit décimal $\geq x$ avec n chiffres après la virgule

Exemple

$$x = \pi \approx 3,141592653$$

Pour $n = 2$ (à $10^{-2} = 0,01$ près) :

- Approximation par défaut : 3,14
- Approximation par excès : 3,15

Pour $n = 3$ (à $10^{-3} = 0,001$ près) :

- Approximation par défaut : 3,141
- Approximation par excès : 3,142

XII. Troncature

1. Définition

La troncature d'ordre n d'un nombre réel x est le nombre obtenu en supprimant

tous les chiffres après le n -ième chiffre après la virgule.

Propriété : La troncature d'ordre n est égale à l'approximation par défaut d'ordre n .

Exemple

$$x = 3,1415926535...$$

- Troncature à 2 chiffres : 3,14
- Troncature à 3 chiffres : 3,141
- Troncature à 1 chiffre : 3,1

$$x = 2,718281828...$$

- Troncature à 3 chiffres : 2,718
- Troncature à 2 chiffres : 2,71