

Chapitre 1 : Logique

Durée du chapitre selon le programme scolaire : 2 semaines (8 heures de cours)

Objectif général : L'apprenant doit distinguer un énoncé d'une proposition et utiliser correctement les connecteurs logiques.

Il doit maîtriser la notion d'implication afin de différencier condition nécessaire, condition suffisante et réciproque.

Il doit enfin utiliser les quantificateurs et les principaux raisonnements mathématiques pour valider ou réfuter des propositions.

Nom du créateur : Équipe math

Date de création : Avril 2026

Sources de documents :

- <http://abc.math.free.fr/2/cours/logique/exercices.html&sz=32>
- https://pedagogie.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/Lycee/Ressources_lycee/JAP_Tale_Logique/Diaporama_logique_raisonement.pdf&sz=32
- <https://fr.scribd.com/document/815240583/7MA20TEPA0221-Seq2Chap4TP3&sz=32>

I. Introduction, histoire	3
II. Énoncé, proposition et variable.....	4
III. Connecteurs logiques et négations.....	6
IV. Quantificateurs et méthode de raisonnement.....	10

Mathématiques Seconde

I. INTRODUCTION, HISTOIRE ET APPROCHE PHYSIQUE

1. Origine historique de la notion

La logique mathématique n'a pas toujours existé en tant que discipline. Son origine remonte à l'Antiquité.

Les précurseurs grecs (IV^e siècle av. J.-C.)

Aristote (384-322 av. J.-C.) est considéré comme le père de la logique. Il a formalisé pour la première fois les principes du raisonnement valide à travers le syllogisme.

Exemple de syllogisme :

- Tous les hommes sont mortels.
- Socrate est un homme.
- Donc Socrate est mort.

Les apports arabes (Moyen Âge)

Des philosophes comme Avicenne (Ibn Sina, Xe siècle) ont enrichi la logique aristotélicienne en introduisant des concepts comme la proposition conditionnelle (« si... alors »).

La révolution moderne (XIX^e – XX^e siècle)

George Boole (1815-1864) a eu l'idée géniale de transformer la logique en calcul mathématique. Il a créé l'« algèbre de Boole » où les valeurs Vrai/Faux sont traitées comme 1 et 0. Gottlob Frege (1848-1925) a inventé la notation moderne avec les quantificateurs ($\forall$ pour « pour tout », $\exists$ pour « il existe »).

2. L'approche par physique

La logique mathématique n'est pas abstraite : elle modélise des situations physiques et quotidiennes.

Exemples concrets :

- En électricité (circuits) :

Un interrupteur représente une proposition (Vrai = courant passe, Faux = courant ne passe pas).

Le « ET » correspond à deux interrupteurs en série (il faut les deux fermés pour que la lampe s'allume).

Le « OU » correspond à deux interrupteurs en PARALLÈLE (il suffit qu'un seul soit fermé).

- En informatique :

Les portes logiques (AND, OR, NOT) sont la base de tous les processeurs.

- Dans la vie courante :

« Si je prends mon parapluie (P) alors je ne serai pas mouillé (Q) » est une implication.

Pourquoi étudier la logique ?

- Pour distinguer le vrai du faux.
- Pour construire des raisonnements solides.
- Pour éviter les pièges (confusion entre implication et réciproque).
- Pour préparer les démonstrations mathématiques.

Nous allons maintenant voir les bases de cette logique, des énoncés aux quantificateurs.

II. Énoncé, proposition et variable

1. Distinction fondamentale

Définition de l'énoncé : Un énoncé est un assemblage de signes ou de mots ayant un sens mathématique ou courant .

Exemple de l'énoncé

- « Le soleil brille. »
- « $5 < 7$ »
- « $x + 9 > 10$ »
- « Le triangle ABC est rectangle. »

Définition de la proposition

Une proposition est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est Vrai (V) ou Faux (F).

Tableau d'exemple

Énoncé	Proposition	Valeur de vérité
« $5 < 7$ »	oui	vrai
« $7 < 5$ »	oui	faux
« $2 + 2 = 4$ »	non	faux

Remarque importante

Une opinion subjective (ex: « Bozy est belle ») n'est pas une proposition mathématique car sa valeur de vérité n'est pas universelle.

2. La notion de variable libre

Définition

Un énoncé peut contenir une lettre (appelée variable). Dans ce cas, on ne peut pas dire s'il est vrai ou faux tant qu'on n'a pas remplacé cette lettre par une valeur. Une variable libre est une lettre qui n'a pas encore reçu de valeur.

Valeur de x	Énoncé obtenu	Valeur de vérité
$x=2$	$2<3$	vrai
$x=5$	$5<3$	Faux

Tableau récapitulatif des types d'énoncés :

Type	Définition	Exemple
Enoncé	Phrase ayant une sens	Le ciel est bleu
Proposition	Énoncé clairement Vrai ou faux	$5<7$
Enoncé à variable	Contient une lettre	$x<3$

III. Connecteurs logiques et négations

1. Le connecteurs "ET" et "OU"

Les connecteurs servent à lier deux propositions P et Q.

a. Le "OU" (inclusif) :

Définition

La proposition « P ou Q » est vraie si au moins l'une des deux propositions (P ou Q) est vraie. Elle n'est fausse que si les deux sont fausses.

Tableau de vérité

P	Q	P ou Q
vrai	faux	vrai
vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux
faux	vrai	vrai

Exemple: Un quadrilatère est un parallélogramme si ses côtés opposés sont égaux OU parallèles.

b. Le "ET" (inclusif) :

Définition

La proposition « P et Q » est vraie uniquement si P et Q sont toutes les deux vraies. Dès qu'une est fausse, l'ensemble est faux.

Tableau de vérité

P	Q	P et Q
vrai	faux	faux

vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux
faux	vrai	faux

Exemple: Un quadrilatère est un carré s'il a ses quatre côtés égaux ET ses diagonales de même longueur. »

Analogies physiques (circuits électriques) :

- "ET" correspond à deux interrupteurs en série.
- "OU" correspond à deux interrupteurs en parallèle.

2. Le négation "NON"

Définition

La négation d'une proposition P (notée « non P ») est vraie quand P est fausse, et fausse quand P est vraie.

Tableau de vérité

P	Non P
vrai	faux
faux	vrai

Règle de la négation combinée (loi de Morgan)

- La négation de « P et Q » est « non P OU non Q ».
- La négation de « P ou Q » est « non P ET non Q ».

Exemple: Pour qu'un nombre soit hors de l'intervalle $]5,99 ; 6,01[$, il doit être $\leq 5,99$ OU $\geq 6,01$.

(La négation de « $5,99 < x < 6,01$ » est « $x \leq 5,99$ ou $x \geq 6,01$ »)

3. Implication, Equivalence et Condition

a. L'implication ($P \Rightarrow Q$)

Définition

L'implication se lit « si P alors Q ». Si P est vraie, alors Q est automatiquement vraie. On dit que P implique Q.

Tableau de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
vrai	faux	faux
vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux
faux	vrai	faux

Attention : Quand P est fausse, l'implication est toujours vraie (on dit qu'elle est vraie par défaut).

La réciproque ($Q \Rightarrow P$) :

La réciproque consiste à échanger le sens. Attention : la réciproque d'une implication vraie peut être fausse.

Exemple: - Implication : « Si je suis parisien, alors je suis français » → VRAIE

- Réciproque : « Si je suis français, alors je suis parisien » → FAUSSE (on peut être français sans être parisien)

b. Condition nécessaire et suffisante

Dans la relation $P \Rightarrow Q$: P est une condition suffisante pour Q ; Il suffit d'avoir P pour être sûr d'avoir Q .

Q est une Condition Nécessaire pour P ; Il faut impérativement Q pour avoir P

Exemple:

« Avoir des œufs » est nécessaire pour faire un gâteau (sans œufs, pas de gâteau).

Mais ce n'est pas suffisant (il faut aussi de la farine, du sucre, etc.).

c. Equivalence

Définition

L'équivalence se lit « P si et seulement si Q ». Cela signifie que l'implication ($P \Rightarrow Q$) ET sa réciproque ($Q \Rightarrow P$) sont toutes les deux vraies.

Tableau de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
vrai	faux	faux
vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai
faux	vrai	faux

Exemple:

Un triangle est rectangle si et seulement si le carré de son plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (Théorème de Pythagore et sa réciproque).

IV. Quantificateurs et méthode de raisonnement

1. Les quantificateurs

Les quantificateurs précisent sur quels éléments porte une propriété.

a. Le quantificateur universel ($\forall$)

Définition

« Pour tout » ou « Quel que soit ». La propriété est vraie pour CHAQUE élément de l'ensemble.

Notation : $\forall x \in E, P(x)$ signifie « Pour tout x appartenant à E , la propriété $P(x)$ est vraie ».

Exemple

« Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ » $\rightarrow$ VRAI (le carré d'un nombre est toujours positif ou nul).

b. Le quantificateur existentiel ($\exists$)

Définition

« Il en existe au moins un ». La propriété est vraie pour AU MOINS UN élément de l'ensemble.

Notation : $\exists x \in E, P(x)$ signifie « Il existe au moins un x appartenant à E tel que $P(x)$ est vraie ».

Exemple

« Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$ » $\rightarrow$ VRAI ($x = 1$ ou $x = -1$).

Tableau de récapitulatif

Quantificateur	Symbole	Signification	Exemple
Universel	$\forall$	Pour tous, quel que soit	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
Existentiel	$\exists$	Il existe au moins un	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

2. Les types de raisonnement

a. Le contre exemple

Définition

C'est la méthode pour prouver qu'une proposition universelle ($\forall$) est FAUSSE. Un seul contre-exemple suffit.

Exemple

Pour réfuter « Tout nombre premier est impair ».

Contre-exemple : le nombre 2 (il est premier, mais il est pair).

$\rightarrow$ La proposition est donc fausse.

b. Le raisonnement par contraposée

Définition

Pour démontrer « $P \Rightarrow Q$ », on démontre que « $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ ». Les deux sont logiquement équivalents.

Tableau de l'équivalence

Implication	Contraposée
$P \Rightarrow Q$	$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

Exemple

Soit la propriété : « Si un nombre est multiple de 10, alors il est multiple de 5 ».

Contraposée : « Si un nombre n'est pas multiple de 5, alors il n'est pas multiple de 10 ».

(La contraposée est plus facile à vérifier dans certains cas.)

c. Le raisonnement par absurde

Définition

On suppose que le contraire de ce qu'on veut prouver est vrai. Si cela mène à une contradiction (quelque chose d'impossible), alors la proposition initiale est vraie.

Exemple classique

Prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

- On suppose le contraire : $\sqrt{2} = a/b$ (fraction irréductible).
- On élève au carré : $2 = a^2/b^2 \rightarrow a^2 = 2b^2$.
- On en déduit que a est pair, puis que b est pair.
- Contradiction car la fraction était supposée irréductible.
- Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

d. La disjonction de cas

Définition

On sépare la preuve en plusieurs situations qui couvrent tous les possibles. Si la propriété est vraie dans chaque cas, alors elle est toujours vraie.

Exemple

Pour prouver une propriété sur un entier n , on peut tester :

- Cas 1 : n est pair
- Cas 2 : n est impair

Exemple concrète

« Pour tout entier n , $n^2 + n$ est pair ».

- Cas 1 : n pair ($n = 2k$) $\rightarrow n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) \rightarrow$ pair
- Cas 2 : n impair ($n = 2k+1$) $\rightarrow n^2 + n = (4k^2+4k+1) + (2k+1) = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1) \rightarrow$ pair

$\rightarrow$ La propriété est vraie dans les deux cas, donc elle est toujours vraie.