DENOMBREMENTS ET PROBABILITES

Table des matières

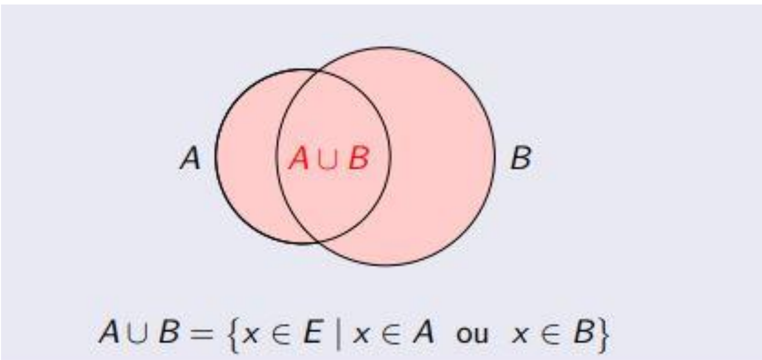
Partie I : DENOMBREMENT

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Connaitre les notions de base sur la théorie des ensembles	• Notion sur la théorie des ensembles : - Vocabulaires ensemblistes - Cardinal d'un ensemble fini, intersection, réunion, --complémentarité.	
• Compter le nombre d'applications/injections /bijections d'un ensemble fini à p éléments vers un ensemble à n éléments	• Applications Définition d'une application, injection, surjection et bijection. • Permutation Combinaison et arrangement.	Cas d'une injection : $p \leq n$ Cas d'une bijection : $n = p$

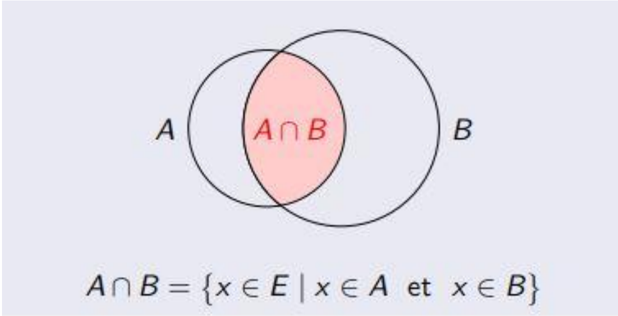
I. Notion de dénombrement

1.Notion d'ensemble

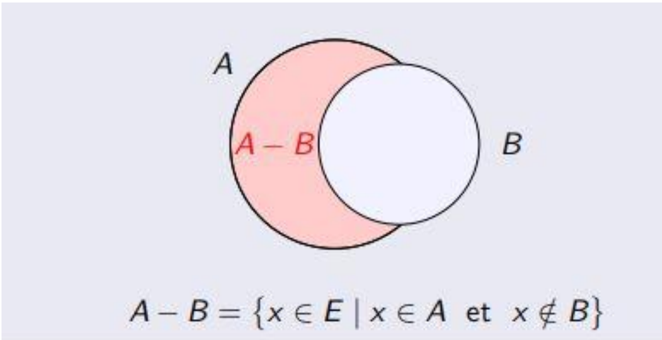
- L'ensemble de tous les éléments qui appartient à A ou B aux deux est appelé **union de A et B**. On note **A∪B**



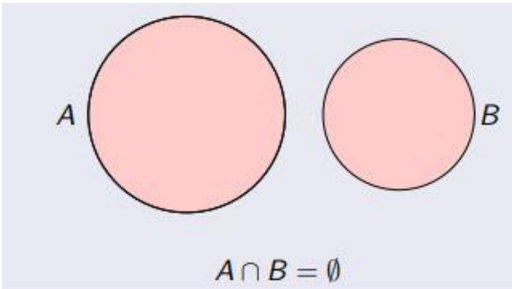
- L'ensemble de tous les éléments qui appartient à la fois à A et à B est appelé **intersection de A et B , on note A∩B**



- L’ensemble de tous les éléments de A qui n’appartient pas à B est appelé **différence de A et B, noté A-B ou A\B.**



- Deux ensembles A et B sont **disjoints** ou **incompatibles** s’ils n’ont **aucun élément en commun**.



- Un ensemble E est fini lorsqu’il admet un nombre fini d’éléments. Le nombre d’éléments de E est appelé le cardinal de l’ensemble et il est noté :
- $Card(E)$ ou $|E|$.
- Dénombrer, c’est compter le nombre d’éléments que contient un ensemble fini, c’est à dire en déterminer le cardinal.

Exemples :

- L’ensemble E des joueurs d’une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $Card(E) = 11$.
- L’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n’est pas un ensemble fini.
- On dit que deux ensembles sont disjoints, s’ils ont aucun élément en commun.

2. Applications particulières

a) Applications injectives (ou injections).

Une application f :E → F est dite injective si deux éléments distincts de E ont deux images distinctes, c'est-à-dire si quels que soient x_1 et x_2 de E tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ (donc si $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$)

En d'autres termes, f :E → F est injective si chaque élément de F possède au plus un antécédent dans E.

b) Applications surjectives (ou surjections)

f :E → F est surjective si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément de E (c'est-à-dire si quel que soit y ϵ F il existe x ϵ E tel que $y=f(x)$ (donc f(E)=F)

En d'autres termes,

f :E → F est surjective si chaque élément de F possède au moins un antécédent dans E,

ou encore,

f :E → F est surjective si quel que soit y de F, l'équation $y= f(x)$ possède au moins une solution x dans E

c) Applications bijectives (bijections)

Définition

f :E → F est bijective su tout élément y de F est l'image d'un et d'un seul élément x de E.

f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Lorsque f :E → F est bijective, CardE = CardF

f :E → Fest bijective si et seulement si quel que soit l'élément y de F, l'équation

y = f(x) possède une solution et une seule dans E.

Application 1 :

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$.
2. g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$.
3. h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x , y) \mapsto (x + y , x - y)$.

Application 2:

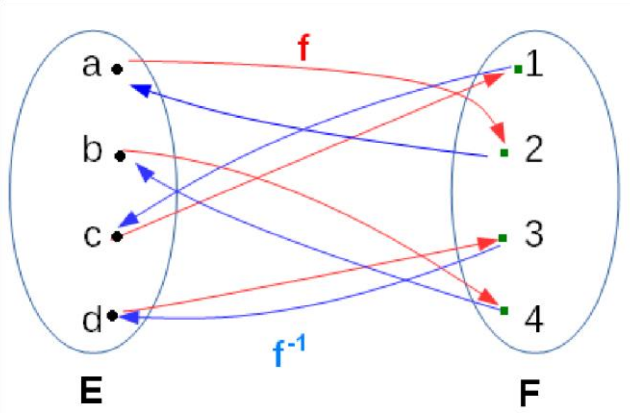
L'application f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x , y) \mapsto (x + y, xy)$ est-elle injective? surjective?

Réciproque d'une bijection

Si f : E → F est bijective, il existe une application de F vers E, notée f^{-1}, appelée réciproque de f, définie pour tout y de F par : si $y = f(x)$ alors $x=f^{-1}(y)$.

f^{-1} : F ⟶ E si et seulement si f: E⟶F y x = f−1(y) x

y ⟶ x = $f^{-1}(y)$ $x \longrightarrow y = f(x)$



f est représentée par les flèches rouge, et donc f^{-1} par les flèches bleues. L'ensemble de départ de f est E,, son ensemble d'arrivée est F, L'ensemble de départ de f^{-1} est F, son ensemble d'arrivée est E.

f(a)=2 donc f^{-1}(2)= a

f(b)=4 donc f^{-1}(4)= b

f(c)=1 donc f^{-1}(1)= c

f(d)=3 donc f^{-1}(3)= d

Propriétés

- $fof^{1} = id_F$; $f^{1}of = id_E$

id_E = identité de E = application identique

id_E : E ⟶ E

$x \longrightarrow id_E(x) = x$

$(fog)^{1} = g^{1}of^{1}$

Si $fof = id_E$, c'est-à-dire $f^{-1} = f$, on dit que f est involutive ou que f est une involution

Remarques

f :E → F

- Si f est une application, alors f (E)⊂F
- f est injective si et seulement si Card f(E) = CardE

f est surjective si et seulement si f(E) = F (car tout élément de F est l'image d'un élément au moins de E).

- Dans le cas où CardE = CardF ,

  Si f est injective, Card f(E) = CardE = CardF

  Card f(E)= card F et $f(E)\subset F$, donc f(E) = F, ainsi f est surjective. Par conséquent, f est bijective

  Si f est surjective, f(E) = F , Cardf(E) = CardF = CardE, donc f est injective. Ainsi, f est bijective

Théorème

Soient E et F deux ensembles tels que CardE = CardF , et f une application de E vers F

Si f est surjective alors f est bijective

Si f est injective alors f est bijective

3. Dénombrement d'application

Soit f une application d'un ensemble E = $\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$ vers un ensemble F.

f est parfaitement définie par la donnée de $f(a_1),f(a_2),\ldots,f(a_p)$

A chaque application f de E vers F correspond donc un et un seul p-uplets $(f(a_1),f(a_2),\ldots,f(a_p))$ d'éléments de E. Et réciproquement à chaque p-uplets $(b_1,b_2,...,b_p)$ d'éléments de F correspond une et une seule application f (qui est définie par $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, ..., $b_p = f(a_p)$). Le nombre d'applications de E vers F est donc égal au nombre de p-uplets d'éléments de F Si CardF n , le nombre de p-uplets éléments de F est $(\text{CardF})^p = n^p$. D'où :

Théorème

- Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p

Si f est injective, $f(a_1)$, $f(a_2)$,…, $f(a_p)$ sont tous distincts

- 0n a n choix pour l'image a_1
- n – 1 choix pour a_2
- ………
- n – p + 1 choix pour l'image de a_p.

- Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments (avec p_n) est égal à n (n – 1)(n -2)….(n – p + 1).Puisque si CardE =CardF , et où $f : E \to F$ est injective, alors f est bijective, on a, le nombre de bijection de E vers F avec CardE = CardF
- Le nombre de la bijection d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements de n éléments pris parmi n.

II. Les types de dénombrement

Soit l'ensemble de départ $\{A, B, C\}$. Les types de dénombrement sont :

- **Les permutations** de l'ensemble de départ sont les suivantes :

(A, B, C) (A, C, B)

(B, A, C) (B, C, A)

(C, A, B) (C, B, A)

- **Les arrangements** de deux éléments parmi les trois de l'ensemble de départ sont les suivants :
  - Avec remise :

(A, A) (A, B) (A, C)

(B, A) (B, B) (B, C)

(C, A) (C, B) (C, C)

  - Sans remise :

(A, B) (A, C)

(B, A) (B, C)

(C, A) (C, B)

- Les combinaisons de deux éléments parmi les trois de l'ensemble de départ sont les suivantes :
  - Avec remise :

(A, A) (A, B) (A, C)

(B, B) (B, C)

(C, C)

  - Sans remise :

(A, B) (A, C)

(B, C)

1. Dénombrement des permutations

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

$(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des 5-uplets qui utilisent tous les éléments de E.

On les appelle des permutations de E.

On tient compte de l'ordre des éléments et les éléments ne se répètent pas.

a) Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

Une **permutation** de E est un n-uplet éléments distincts de E.

Remarque : Une permutation d'un ensemble à n élément est un n-uplet d'un ensemble à n éléments. Pour une permutation, on a $k = n$.

b) <u>Propriété</u>

Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments.

Le nombre de permutations de $\boldsymbol{E}$ est égal à $\boldsymbol{n}!$.

<u>Exemple</u> :

6 façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

(A,B,C) ou (B,A,C) ou (C,A,B) ou (A,C,B) ou (B,C,A) ou (C,B,A)

Notation : 3! = 1x2x3 = 6 on lit factorielle 3 est égale à 6

Formule : n ! = 1x 2 x … x (n-1)x n

<u>Exemple:</u>

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 99 \times 100$

$1! = 1$

$0! = 1$ par convention

<u>Application 3</u> :

Dénombrer le nombre de permutations.

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.

C'est le moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.

- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

c) Dénombrement des k-uplets

Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments peuvent se répéter.

Exemple :

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$.

On lance par exemple deux dés à six faces. On note $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.

Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles correspondants aux résultats du lancer de deux dés. On a par exemple :

$$(1, 2) \in E^2$$

$$(6, 3) \in E^2$$

$$(5, 5) \in E^2$$

D'après le principe multiplicatif, il existe $6 \times 6 = 6^2$ soit 36 couples possibles.

Propriété

Soit un ensemble fini E à n éléments.

Alors le nombre de k-uplets est égal à :

$$Card(E^k) = n^k$$

Application 4 :

Dénombrer le nombre de $\boldsymbol{k}$-uplets.

« Il y avait pour entrer juste un digicode Deux lettres et dix chiffres incommodes

Un détail que t'avais surement oublié

4 milliards de possibilités »

Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger en considérant que le code est constitué de 2 lettres (parmi A, B, C, … Z) suivies de 10 chiffres (parmi 0, 1, 2, … 9).

Par exemple, RT 49903 42472 pourrait être un code à composer sur le digicode.

2. Arrangements

Ici, l'ordre des éléments est à prendre en compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{a\,; b\,; o\,; p\,; r\}$.

- (b, o, a) et (r, a, p) sont des triplets d'éléments distincts de E.
- (b, a, r, b, a, r) n'est pas un 6-uplet d'éléments distincts de E car des éléments se répètent.
- (p, r, o, b, a) est un 5-uplet différent de (b, a, p, r, o). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

Calculons par exemple le nombre de triplets d'éléments distincts de E.

- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de triplets d'éléments distincts de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

a) Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.

Un **k-uplets d'éléments distincts** de E est un k-uplet pour lequel tous les éléments sont différents.

Un $\boldsymbol{k}$-uplets d'éléments distincts est également appelé arrangement de $\boldsymbol{k}$ éléments parmi $\boldsymbol{n}$ noté $\boldsymbol{A_k^n}$

Propriété :

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E est égal au nombre **d'arrangements** de k éléments parmi n.

Notation : $\boldsymbol{A_k^n}$

Formule : $\boldsymbol{A_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Application 5 :

Dénombrer le nombre de $\boldsymbol{k}$-uplets d'éléments distincts (nombre d'arrangements possibles).

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil.

Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.
Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement.

3. Combinaisons

Ici, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas.

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

Le sous-ensemble $\{1\,;2\,;3\}$ est appelée une **combinaison de E à 3 éléments.**

Le sous-ensemble $\{2\,;5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.

Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1\,;2\}$ et $\{2\,;1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.

Une **combinaison** de k éléments de E est un sous-ensemble de E.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

Notation : $\binom{n}{k}$.

Formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Application 6 :

Dénombrer le nombre de combinaisons.

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.

a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?