GEOMETRIE

Table des matières

Partie I: Géométrie plane

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observation
Calculer un produit scalaire dans une configuration géométrique. -Démontrer des relations métriques dans une figure géométrique donnée. Faire apparaître un point comme barycentre à partir d'une relation vectorielle -Utiliser les propriétés du barycentre pour déterminer les lignes de niveaux. Construire les images des figures géométriques données par les transformations du plan.	-Combinaison linéaire ; décomposition d'un vecteur -Bases quelconques -Produit Scalaire Barycentre : - Barycentre de deux, trois et quatre points pondérés - Réduction de la somme vectorielle : $\Sigma\alpha i\overrightarrow{MAi}$ - Ligne de niveau : $\overrightarrow{MA}$=k ; $\overrightarrow{MA}.\vec{v}=0;\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$; $\overrightarrow{MA}$= k$\overrightarrow{MB}$ avec k $\in IR$ Transformations du plan - Translation - Symétrie - Homothétie - Rotation - Composition de deux transformations - Similitude plane directe.	- On donnera les quatre expressions du produit scalaire. On appliquera le produit scalaire sur les relations métriques dans un triangle quelconque : théorème de la médiane ; relation d'Al-Kachi ; formules des sinus ; formules des aires. Les expressions analytiques des transformations du plan (translation, symétrie, homothétie et rotation) seront traitées sous forme de travaux dirigés.

I. Vecteur du plan

1. Combinaison linéaire

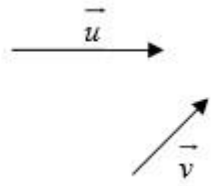
a) Définition

Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux nombres réels a et b vérifiant : $\vec{w}$ =a$\vec{u}$ + b $\vec{v}$.

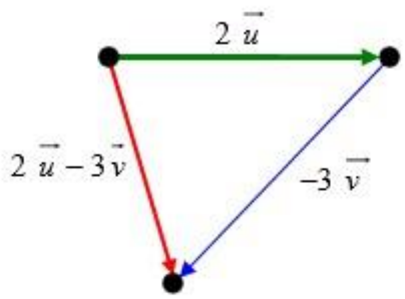
Exemples

$\vec{w}=\vec{\imath}-5\vec{\jmath}$; $\vec{k}$ = $\overrightarrow{2\imath}-3\vec{\jmath}$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

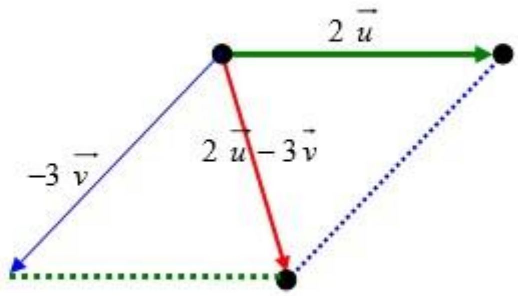
On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Construire le vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$.



Règle de la relation de Chasles :



Règle du parallélogramme :



- Dans un parallélogramme ABCD, on a : $\overrightarrow{AC}= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
- Le vecteur $2\vec{u}$ est une combinaison de $\vec{u}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{4u}$ - $\overrightarrow{2v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est une combinaison linéaire de tout vecteur. $\overrightarrow{0u}$ - $\overrightarrow{0v}$ = $\vec{0}$

b) Vecteurs colinéaires

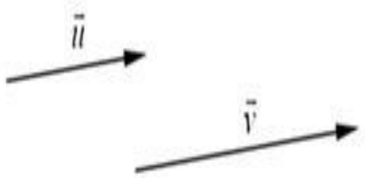
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont même direction.

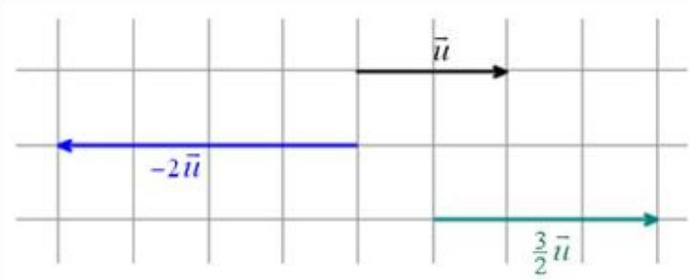
On le symbolise par : $\vec{u}$ // $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ // $\vec{v}$ signifie qu'il existe un réel k vérifiant : $\vec{v}$ = k$\vec{u}$;
- Si k > 0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens ;

- Si k < 0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

Illustrations de vecteurs colinéaires de même sens ou de sens contraires :





<u>Exemples</u> :

- Soit A, B et C trois points alignés. B est milieu du segment [AC] signifie $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Alors $\overrightarrow{AC}$ // $\overrightarrow{AB}$.

2. Base du plan

a) <u>Définition</u>

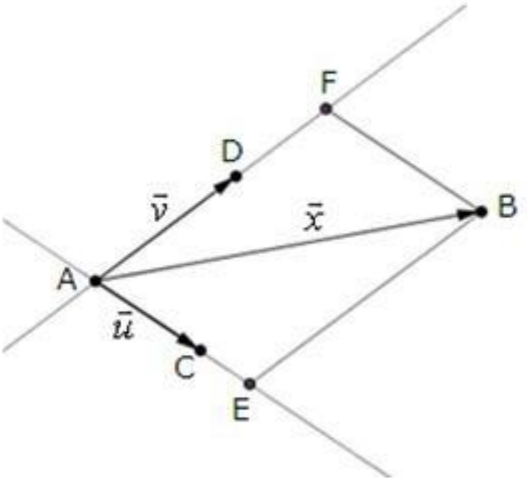
Tout couple de vecteurs non colinéaires ($\vec{u}$; $\vec{v}$) constitue une base du plan vectoriel.

Une base est un couple de vecteurs non colinéaires qui permet d'exprimer n'importe quel autre vecteur à l'aide d'une combinaison linéaire.

Si ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est une base, tout vecteur $\vec{x}$ du plan s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ *et* ; $\vec{v}$.

En effet :

- Si $\vec{x}$ est nul, alors $\vec{x}=0\vec{u}+0\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$, alors il existe un nombre réel k tel que . $\vec{x}=k\vec{u}+0\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors il existe un réel h tel que $\vec{x}=0\vec{u}+h\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ n'est ni colinéaire à $\vec{u}$ ni colinéaire à $\vec{v}$:
- Soient A, B, C et D des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$.
- Soient E∈(AC) et F ∈(AD) tels que AEBF soit un parallélogramme. On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$
- Or $\overrightarrow{AE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AD}$. Donc il existe deux nombres réels a et b tels que : $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=b\overrightarrow{AD}$.
- Par suite, $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AD}$. Ainsi : $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{v}$.



b) Composantes ou coordonnées d'un vecteur

b-1. Composantes d'un vecteur

Soit ($\vec{u}$; $\vec{v}$) une base du plan et $\vec{w}$=a $\vec{u}$+b $\vec{v}$

Les réels a et b sont les composantes de $\vec{w}$ dans cette base ; on note $\vec{w}\binom{a}{b}$

Coordonnées du vecteur	$\vec{w}\binom{a}{b}$

Exemple : $\vec{w}$=2 $\vec{u}$+3 $\vec{v}$ soit $\vec{w}\binom{2}{3}$

b-2. Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$et $\binom{a\prime}{b\prime}$ dans une base ($\vec{i}$; $\vec{j}$)

Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,noté dét ($\vec{u}$; $\vec{v}$) , dans la base ($\vec{i}$; $\vec{j}$) est :

$$\text{dét}\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \text{a b'}-\text{a' b}$$

Propriétés

- dét ($\vec{u}$; $\vec{u}$) =0
- En effet, dét ($\vec{u}$; $\vec{u}$) =a b−a b=0

- dét ($\vec{u}$; $\vec{v}$) =−dét ($\vec{v}$; $\vec{u}$) .

Il suffit d'appliquer la définition et de comparer :

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si dét ($\vec{u}$; $\vec{v}$) =0 .

($\vec{u}$; $\vec{v}$) est une base si et seulement si dét ($\vec{u}$; $\vec{v}$) ≠0 .

Exemple : Soit $\vec{w}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ Écrire le vecteur $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Méthode pour trouver les composantes d'un vecteur dans une base :

- Ecrire l'équation vectorielle
- Convertir cette équation en système numérique.
- Résoudre ce système qui a une solution unique.

Posons $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. *Alors* $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}= x(\vec{\imath}+\vec{\jmath})+y(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ *ou encore* $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}=(x-y)\,\vec{\jmath}+(x+y)\,\vec{\jmath}$.

On doit résoudre le système : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + y \\ x = 2 - y \end{cases}$

Par addition membre à membre on obtient 2 x = 1+2+y – y soit $x = \frac{3}{2}$

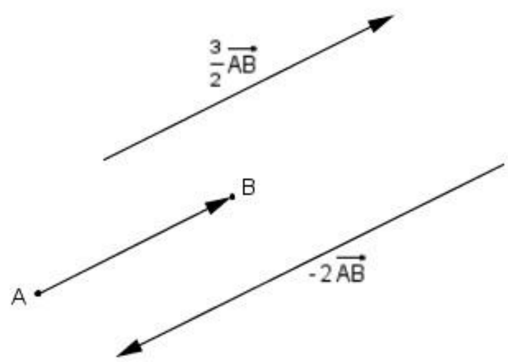
Après calcul, on trouve x=1,5 et y=0,5 ce qui vérifie bien $x+y=2$

D'où $\boldsymbol{\vec{w}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{w} = 1{,}5\,\vec{u} + 0{,}5\,\vec{v}}$

3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :

- Sa longueur est multipliée par $|k|$
- Si $k > 0$ son sens est inchangé et si $k < 0$ son sens est inversé.



Propriété :

La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels.

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

k + k’) $\vec{u}$ = k$\vec{u}$ + k’$\vec{v}$

4. Produit scalaire

a) Définition

Norme d'un vecteur : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $||\vec{u}||$, est la distance AB.

Produit scalaire : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$

b) Propriété

- $\vec{u}.\vec{v}$= 0, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$, dans le cas contraire. $\vec{u}.\vec{v}$ se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$.

c) Expression d’un produit scalaire

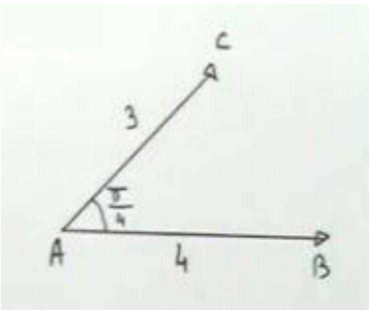
Le produit scalaire peut s’exprimer sous quatre formes :

Expression trigonométrique (géométrique)

Soit deux vecteur $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ avec $\|\overrightarrow{AB}\|$=4 et $\|\overrightarrow{AC}\|$= 3.

L’expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\,.\,\|\overrightarrow{AC}\| \cos \widehat{BAC}$.

Exemple:



$\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$ Rad

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ = 4 x 3 x $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{2}$

Expression analytique (avec un repère)

Le plan est rapporté à un plan orthonormé (o, $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs avec $\vec{u}\ (x; y)\ et\ \vec{v}(x'; y')$

L'expression du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy'

Exemple :

Soit trois point A (1 ; 2) , B (3 ; 4) , C (7 ; 6).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ .\overrightarrow{AC}$ = 2 x 6 + (-3) x 4 = 0 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ et\ \ \overrightarrow{AC}$ **sont orthogonaux**

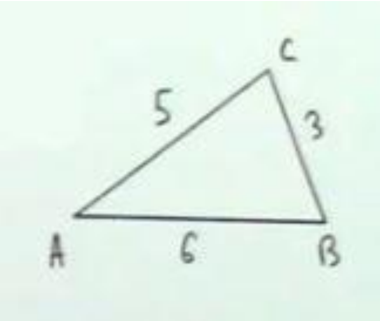
Formule des normes (avec les longueurs)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

L'expression du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\ (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}.\vec{v}\|^2$

Exemple :

Soit deux vecteur $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ dans un triangle ABC avec $\|\overrightarrow{AB}\|$= AB = 6 et $\|\overrightarrow{AC}\|$= AC= 5 et $\|\overrightarrow{BC}\|$= BC= 3.



$\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ ($AB^2 + AC^2 - CB^2$)

$\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ (36 + 25 - 9) = $\frac{1}{2}$ x 52

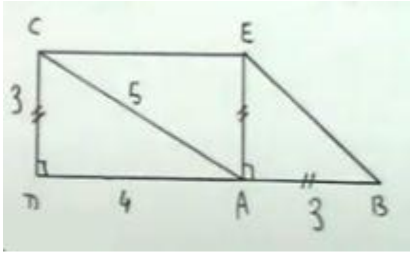
$\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$= 26

Projection orthogonale

Soit deux vecteur $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$.

L'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Exemple :



$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$= $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AD}$

D est le projeté orthogonal de C sur AB. Ce qui veut dire que AB et AD sont colinéaire (Cos = -1)

$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$= $\|\overrightarrow{AB}\|$. $\|\overrightarrow{AD}\|$ cos $\widehat{BAD}$.

$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$= 3 x 4 x (-1)

$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$= -12

Application 1 : On considère deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que AB = 3, AC = 8 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

Calculer $\overrightarrow{AC}.\,\overrightarrow{AB}$.

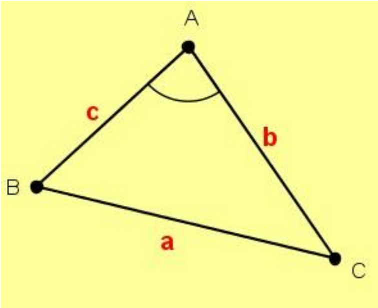
Application 2 : on considère le carré ABCD de centre O et de côté 8. Calculer les produits scalaires par projection des cas suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

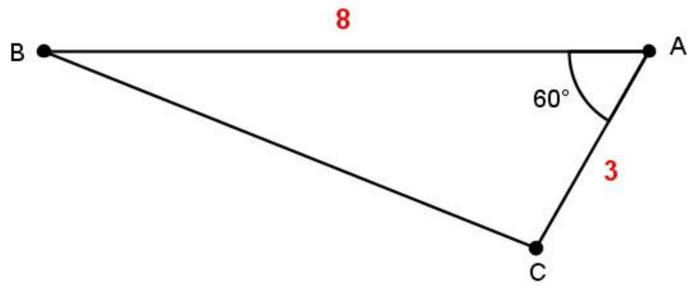
d) Relations métriques dans un triangle

Relation d'Al Kashi

Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle soit une généralisation du théorème de Pythagore. Dans un triangle quelconque ABC en prenant les notations indiquées sur la figure ci-dessous, on a : $a^2 = b^2 + c - 2bc \cos \hat{a}$



Exemple : Soit le triangle ci-dessous. Déterminer la longueur BC et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.



Avec nos notations nous avons alors : $b = 3$, $c = 8$ et $\hat{A} = 60°$. Nous cherchons donc à déterminer a les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. D'après la relation d'Al Kashi, nous avons :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ &= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \frac{1}{2} \\ &= 9 + 64 - 24 \\ &= 49 \end{aligned}$$

donc : $a = 7$

Pour déterminer l'angle $\hat{B}$, on fait une permutation circulaire de la formule d'Al Kashi, c'est à dire :

$a \rightarrow b$

$b \rightarrow c$

$c \rightarrow a$

$\hat{A} \rightarrow \hat{B}$

On obtient donc : $b^2 = c^2 + a^2 + 2ac \cos \hat{B}$

$2ac \cos \hat{B} = a^2 + c^2 - b^2$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{49 + 64 - 9}{2 \times 7 \times 8}$$

$$= \frac{104}{112}$$

$$= \frac{13}{14}$$

On obtient donc : $\hat{B} = \arccos\left(\frac{13}{14}\right) \simeq 21{,}79°$

Enfin, on trouve l'angle $\hat{C}$, par complément à 180, soit :

$\hat{C} \simeq 180 - 60 - 21{,}79 \simeq 98{,}21°$

Application 3 :

a. Construire un triangle ABC tel que AC = 3, AB = 6 et A= $\pi/6$
b. Déterminer la valeur exacte de BC.

Relation des sinus

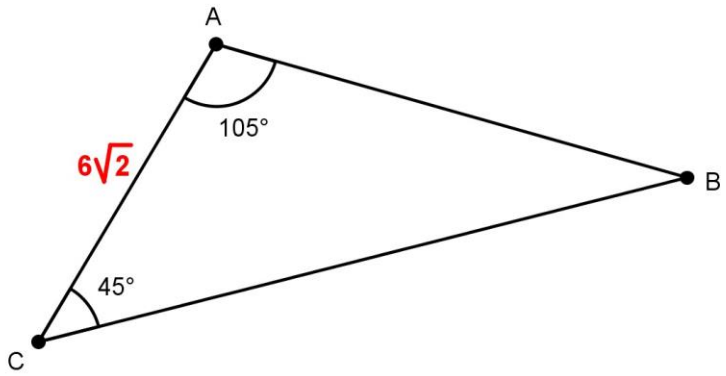
La formule d'Al Kashi est efficace si l'on connaît deux distances et un angle ou 3 distances. Par contre si l'on ne connaît qu'une distance, la relation n'est pas utilisable. On utilise alors la relations des sinus.

Dans un triangle quelconque ABC, on a les relations suivantes en gardant les mêmes notations et en appelant S la surface du triangle ABC :

$$\varphi = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$$

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

Exemple : Soit le triangle ci-dessous. Déterminer la longueur AB et BC.



Avec nos notations nous avons alors : b = $6\sqrt{2}$, $\hat{A}$ = 105° et $\hat{C}$ = 45°. On cherche les longueurs AB = c et BC = a

On détermine l'angle $\hat{B}$ par complément à 180 :

$\hat{B} = 180 - 105 - 45 = 30°$

En appliquant la relation des sinus, on a :

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$c = \frac{b \sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$$

$$c = \frac{6\sqrt{2} \sin 45}{\sin 30}$$

$$c = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

c = 12

Par permutation circulaire, on trouve a

$$a = \frac{b \sin \hat{A}}{\sin \hat{C}}$$

$$a = \frac{12 \sin 105}{\sin 45}$$

$$a = \frac{12 \sin 105}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

a= $12\sqrt{2}$ sin105

a= 16,39

Théorème de la médiane

Ce théorème permet de connaître la longueur de la médiane à partir de trois longueurs du triangle.

Dans un triangle quelconque ABC, on appelle I le milieu du segment [BC], on a alors :

$$AB^2 + AC = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Aire d'un triangle

L'aire du triangle ABC est donnée par S = $\frac{1}{2}$ AB x CH

Deux cas se présentent :

- si l'angle Â est aigu, CH = AC sin Â
- si l'angle Â est obtus, CH = AC sin $\widehat{CAH}$

Or $\widehat{CAH} = \pi - \hat{A}$, donc $\sin \widehat{CAH} = \sin(\pi - \hat{A}) = \sin \hat{A}$

Dans les deux cas, on a : $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} b\, c \sin \hat{A}$

L'aire d'un triangle est donc : $\frac{1}{2} b\, c \sin \hat{A}$

Remarque :

De la même façon, **$S = \frac{1}{2} a\, c \sin \hat{B}$ et $S = \frac{1}{2} a\, b \sin \hat{C}$**

II. Barycentre

1. Barycentre de deux points

a) Définition

Le mot barycentre renvoie à la notion de centre d'inertie ou de gravité en physique.

On appelle barycentre de deux points A et B associés aux coefficients respectifs α et β, le point G tel que :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

On note alors G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)

Démonstration : montrons qu'un tel point G existe et qu'il est unique.

Il s'agit alors de pouvoir placer ce point.

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{GB}$ à l'aide du point A en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ on obtient alors :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB}$$
$$-(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = -\beta\overrightarrow{AB}$$

avec $\alpha + \beta \neq 0$ et on obtient $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

On peut alors placer le point unique G ainsi défini.

b) Propriétés

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), alors : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Application : A et B étant donnés, placer les barycentres G_1 et G_2 des points pondérés respectifs $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(A, -1)$, $(B, 3)$.

Comme G_1 est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Comme G_2 est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{-1+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

On peut alors placer les deux point G_1 et G_2 :

Remarque :

- Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que G est l'isobarycentre des points A et B. G est alors le milieu du segment $[AB]$.
- Le barycentre G est situé sur la droite (AB)

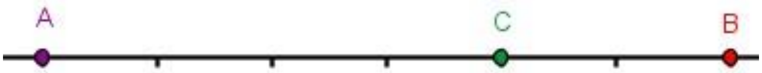
Cela découle de la définition : Homogénéité du barycentre. Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors G est aussi le barycentre de (A, kα) et (B, kβ) lorsque k est un réel non nul.

$$\boldsymbol{\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k\alpha\,\overrightarrow{GA} + k\beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}\ \text{ avec } k \neq 0}$$

Exemple : Le barycentre de $(A, \frac{1}{10})$ et $(B, \frac{1}{5})$ est aussi le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

Le barycentre de deux points A et B, se situe sur la droite (AB). Réciproquement si trois points sont alignés, alors l'un est le barycentre des deux autres.

Exemple : Soit les trois alignés A, B et C alignés comme sur la figure ci-dessous. Montrer que C'est le barycentre de (A, α) et (B, β).



D'après la figure on a : $CA = -2CB$

On a donc : $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

C'est alors le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$

c) Réduction

Formule de réduction :

Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors pour tout point M du plan, on a :

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\ \overrightarrow{MG}$

Démonstration : en appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\
&= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA}) + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GA}) \\
&= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}
\end{aligned}$$

$= (\alpha + \beta)\ \overrightarrow{MG}$ car G est le barycentre de (A, α) et (B, β) donc $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Application 4: Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient une relation vectorielle.

$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. Déterminer l'ensemble Γ des point M qui vérifient la relation (R) :

2. Barycentre de trois points

a) Définition

On appelle barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ), le point G qui vérifie :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Démonstration : montrons qu'un tel point existe et est unique. Exprimons le point G à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GA} = \vec{0}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC}$$

$$-(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC}$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

On peut alors placer le point G.

Remarque : L'isobarycentre ($\alpha = \beta = \gamma$) de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

b) Associativité

Théorème d'associativité :

Si G est le barycentre de (A, α),

(B, β) et (C, γ) et si H est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec α + β 6= 0 alors G est le barycentre de (H, α + β) et (C, γ).

Démonstration : toujours avec la relation de Chasles. On sait que G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) donc :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\alpha(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HG}) + \beta(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Comme H est le barycentre de (A, α) et (B, β), avec $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

On obtient donc : (α + β) GH + γ GC = $\vec{0}$

D'où **: *G* est bien le barycentre de (*H*, *α* + *β*) et (*C*, *γ*).**

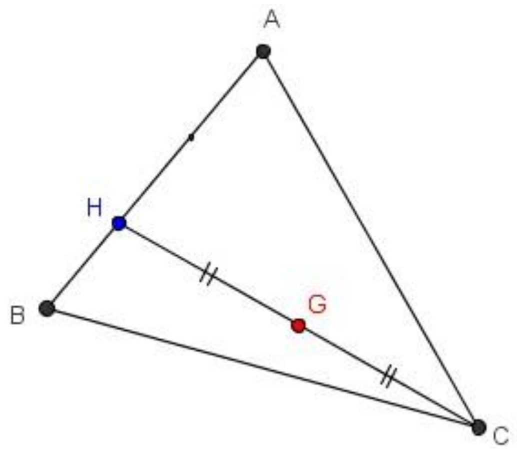
Exemple : Ce théorème est bien utile pour placer le barycentre de trois points car il permet de placer le barycentre de 3 points en plaçant coup sur coup le barycentre de deux points.

Soit un triangle ABC. Placer le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$.

<u>Méthode 1 :</u> Soit le point H barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$, on a alors :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de $(H, 3)$ et $(C, 3)$. G est donc l'isobarycentre de H et de C, G est donc le milieu de $[HC]$.

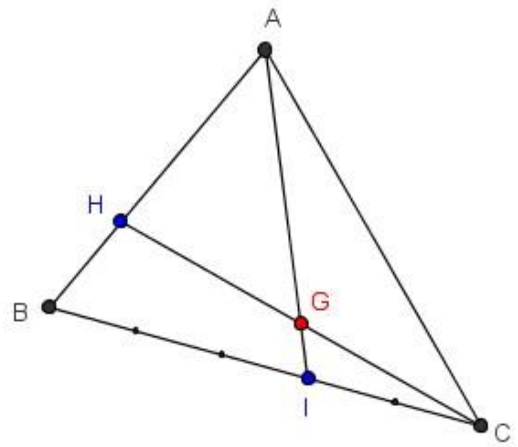


Méthode 2 : Soit les point H et I respectivement barycentre de (A, 1), (B, 2) et (B, 2), (C, 3). D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (H, 3) et (C, 3) donc H, G et C sont alignés.

De même G est aussi d'après le théorème d'associativité, le barycentre de (A, 1) et (I, 5), donc les points A, G et I sont alignés.

G est donc l'intersection des droites (HC) et (AI). Il suffit alors de placer les points H et I.

$\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$



c) Réduction

Formule de réduction et coordonnées de G :

Si G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ), alors pour tout point M du plan, on a :

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$

Les coordonnées de G dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$$

Exemple : Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que AB = 4 cm. Déterminer et tracer Γ, l'ensemble des points M du plan tels que :

$$||-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=4$$

On cherche à réduire l'expression de gauche en introduisant le point G barycentre des points $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$, on a alors grâce à la formule de réduction :

$$-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-1+1+2)\,\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$$

L'ensemble des points M revient à :

$$||2\overrightarrow{MG}||=4$$

$MG = 2$

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G et de rayon 2 cm.

Pour tracer Γ, il faut d'abord placer G puis déterminer si le cercle passe par un point particulier. Pour placer G, on utilise le théorème d'associativité. On ne peut prendre comme barycentre intermédiaire les points A et B car la somme de leur coefficient est nulle. On pose alors H, barycentre des points (B, −1) et (C, 2), on a alors :

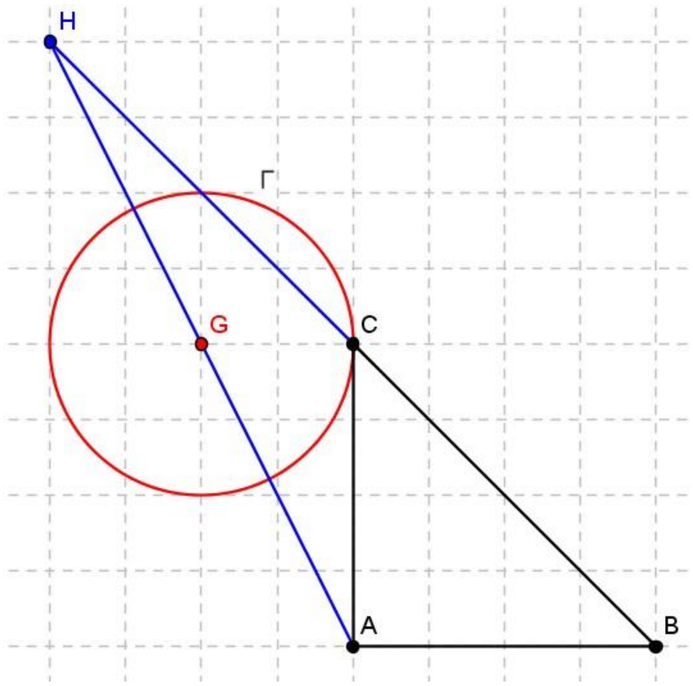
$$\overrightarrow{BH}=\frac{2}{-1+2}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$$

G est alors le barycentre de (A, 1) et (H, −1 + 2). Donc G est l'isobarycentre des points A et H. G est le milieu de [AH]

On observe que le point C appartient au cercle solution. Pour le vérifier, on remplace M dans la relation, on a alors :

$$||-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CC}\,||=||\overrightarrow{AC}\ +\overrightarrow{CB}||=AB=4$$

La relation est vérifiée, donc le point C appartient à Γ. On pourrait aussi le montrer par le théorème des milieux. On obtient la figure suivante :



Exemple : Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placer les points A(2; 1), B(−1; 4) et C(−3; −2). Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points (A, −2), (B, 3) et (C, 1). Placer G.

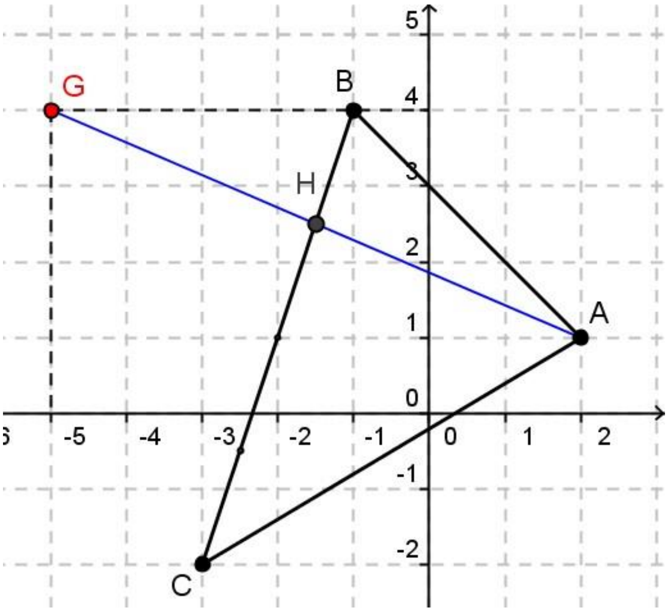
On utilise la formule donnant les coordonnées de G :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{-2+3+1}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{-2+3+1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{-2+3+1}\overrightarrow{OC}$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

On obtient alors les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = -2 + \frac{3}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times (-3) = -5 \\ y_G = -1 + \frac{3}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times -2 = 4 \end{cases}$$



3. Barycentre de *n* points

a) Définition

On peut généraliser la notion de barycentre à *n* points distincts.

On appelle barycentre des points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n), le point G défini par :

$\alpha_1 \overrightarrow{\boldsymbol{GA_1}} + \alpha_2 \overrightarrow{\boldsymbol{GA_2}} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{\boldsymbol{GA_n}} = \vec{\mathbf{0}}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \vec{\mathbf{0}}$

On peut aussi utiliser la notation avec le signe somme (Σ) :

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_1} \overrightarrow{\boldsymbol{GA_i}} = \vec{\mathbf{0}}$ avec $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_1} \neq \mathbf{0}$

b) Associativité

La notion d'associativité se généralise aussi. Pour trouver le barycentre de n points, on peut remplacer p points, pris parmi les n points par leur barycentre H (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.

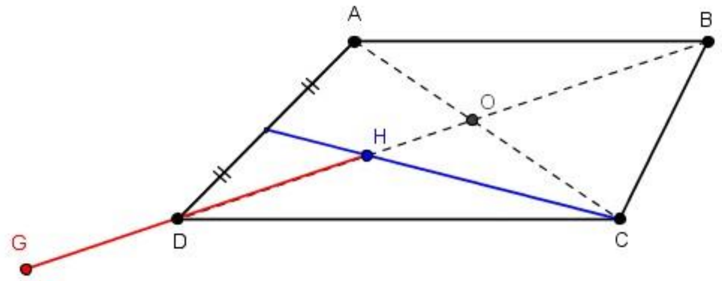
Exemple : ABCD est un parallélogramme. Déterminer et placer le barycentre des points (A, 2), (B, −3), (C, 2) et (D, 2).

Comme les points A, C et D ont le même coefficient, on introduit le point H le barycentre de (A, 2), (C, 2) et (D, 2). H est alors le centre de gravité du triangle ACD (intersection des médianes).

D'après le théorème d'associativité G est alors le barycentre des points (H, 6) et (B, −3), on a alors :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{-3}{6-3}\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HB}$$

On obtient la figure suivante :



c) Réduction

Formule de réduction et coordonnées de G:

Si G est le barycentre des points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) et si M est un point du plan, on a les formules suivantes :

$\alpha_1 \overrightarrow{\boldsymbol{MA_1}} + \alpha_2 \overrightarrow{\boldsymbol{MA_2}} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{\boldsymbol{MA_n}} = (\alpha_1 + \alpha 2 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{\boldsymbol{MG}}$

ou avec le signe somme :

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_1} \overrightarrow{\mathbf{MA_i}} = (\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_1}) \overrightarrow{\boldsymbol{MG}}$

et $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\sum \boldsymbol{\alpha_1}}(\boldsymbol{\alpha_1}\overrightarrow{\boldsymbol{OA_1}} + \boldsymbol{\alpha_2}\overrightarrow{\boldsymbol{OA_2}} + \ldots + \boldsymbol{\alpha_n}\overrightarrow{\boldsymbol{OA_n}}$

ou $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\sum \boldsymbol{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_1} \overrightarrow{\boldsymbol{OA_\iota}}$

Exemple :

ABCD est un rectangle. Déterminer et tracer l'ensemble Γ, des points M tels que :

$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}||$

On cherche à réduire les deux termes de l'égalité. Pour le terme de gauche, on pose G l'isobarycentre des points A, B, C et D. D'après la formule de réduction, on a alors :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\,\overrightarrow{MG}$

Pour le terme de droite, on s'aperçoit que la somme des coefficients est nulle, on ne peut donc introduire un barycentre. On la réduit alors en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})$$
$$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$$

Comme ABCD est un rectangle alors BC = AD, donc

$=-2\overrightarrow{AB}$

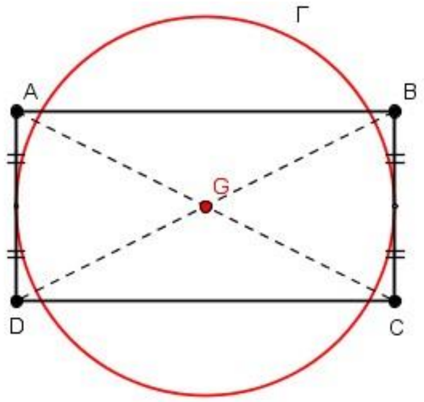
La relation devient donc :

$||4\overrightarrow{MG}||=||-2\overrightarrow{AB}||$

MG = $\frac{1}{2}$AB

L'ensemble Γ est donc le cercle de centre G est de rayon $\frac{1}{2}$AB

Comme G est l'isobarycentre des points A, B, C et D, et comme ABCD est un rectangle, on vérifie aisément que G se situe au centre du rectangle. Comme $\frac{1}{2}$AB représente la moitié du côté AB, le cercle Γ passe par les milieux des côtés BC et AD. On obtient donc :



Application 5 :

[AB] est un segment.
C est le barycentre de (A,-1), (B,4).

P est le barycentre de $(A;\frac{1}{3})$, (B,β) avec $\beta \neq \frac{1}{3}$

Déterminer β dans chacun des cas suivants.

1) P et C sont confondus.
2) $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$.

III. Transformations du plan

1. Définition

Les transformations géométriques planes sont des applications du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même.

Les transformations qui seront objet d'étude sont ; la translation, l'homothétie, la symétrie centrale, la symétrie axiale et la rotation.

2. Types de transformation géometrique

a) Translation

Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$ la transformation du plan P qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\begin{cases} t_{\vec{u}} : \mathrm{P} \to \mathrm{P} \\ M \to M' \end{cases}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Exemple :

Déterminer les coordonnées des points A', B', C'images respectives de A,B,C et par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{-9}$

Solution :

$t_{\vec{u}}$ (A)= A'⇔ $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ ⇔ $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{a'} - x_a \\ y_{a'} - y_a \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{a'} - 7 \\ y_{a'} - 5 \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{a'} - 7 = 2 \\ y_{a'} - 5 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{a'} = 2 + 7 = 9 \\ y_{a'} = -9 + 5 = -4 \end{cases}$

Donc : A' (9 ; -4)

$t_{\vec{u}}$ (B)= B'⇔ $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$ ⇔ BB'$\begin{pmatrix} x_{b'} - x_b \\ y_{b'} - y_b \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{b'} + 4 \\ y_{b'} - 1 \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{b'}+4 = 2 \\ y_{b'}-1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{b'} = 2-4 = -2 \\ y_{b'} = -9+1 = -8 \end{cases}$

Donc : B' (-2 ; -8)

$t_{\vec{u}}$ (C)= C'$\Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Leftrightarrow$ CC'$\begin{pmatrix} x_{c'}- x_c \\ y_{c'}-y_c \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} x_{c'}+3 \\ y_{c'}+6 \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{2}{-9}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{b'}+3 = 2 \\ y_{b'}+6 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{c'} = 2-3 = -1 \\ y_{c'} = -9-6 = -15 \end{cases}$

Expression analytique d'une translation

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit $\vec{u}\binom{a}{b}$. Soit les points M(x,y) et M'(x',y') tels que ;

$t_{\vec{u}}$ (M)= M'.

Il en résulte que : MM'$=\vec{u}$

MM'$\begin{pmatrix} x_{M'}- x_M \\ y_{M'}-y_M \end{pmatrix} = \vec{u}\binom{a}{b} \Longrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - x = b \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ est appelée expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

Application 6 :

Dans un repère orthonormé , soient :

- la droite d'équation ;
- le cercle d'équation .

Déterminez les images de et de par :

1. la translation de vecteur ;
2. la translation de vecteur ; ;

b) Rotation

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit un point$A$ fixé et soit α un réel donné.

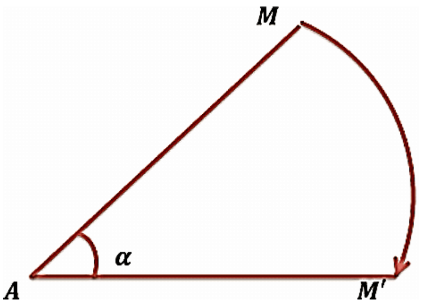
On appelle une rotation de centre A et d'angle α et on la note $R_{(A,\alpha)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point A invariant, et qui à tout point M distinct de A associe le point M' tel que ;

$AM' = AM$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha$.

On écrit ;

$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(A) = A \ \ et}$$

$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases}}.$$



<u>Application 7</u>

Soit ABC un triangle non aplati. Construire l'image de ABC par R (B, $\frac{\pi}{2}$).

c) <u>Homothétie</u>

<u>Définition</u>

Soit k un nombre réel non nul et distinct de $1\ (k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$, et Ω un point fixé du plan $\mathcal{P}$.
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k que l'on note h(Ω, k) , la transformation dans le plan P qui laisse le point Ω invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$

On note : h $_{(}\boldsymbol{\Omega}$,k)(M) = M' ⇔ $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M'}} =$ k. $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M}}$

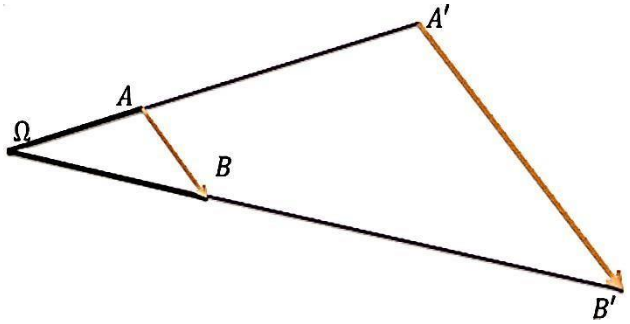
<u>Application 8</u> :

Soit ABC est un triangle non aplati et h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$. Construire l'image de ABC par $h_{(A,2)}$.

<u>Propriétés</u>

1°/ Le centre Ω d'une homothétie, un point M et son imageM' , sont alignés.

2°/ Si $\begin{cases} h_{(\Omega,k)}(A) = A' \\ h_{(\Omega,k)}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$



Expression analytique d'une homothétie

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit l'homothétie h de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k et notée $h_{(\Omega,k)}$. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, et $M'(x',y')$ son image par l'homothétie h.

On a ; $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$,

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = k.\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} kx-kx_0 \\ ky-ky_0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-x_0 = kx-kx_0 \\ y'-y_0 = ky-ky_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0+kx-kx_0 \\ y' = y_0+ky-ky_0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = kx+(1-k)x_0} \\ \boldsymbol{y' = ky+(1-k)y_0} \end{cases} .$$

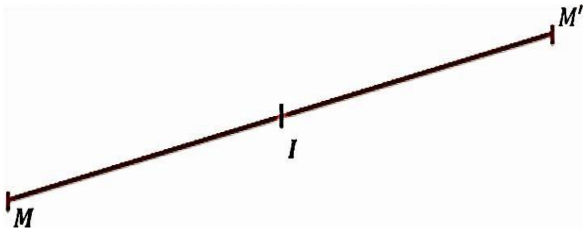
Cette écriture est l'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d) La Symétrie centrale

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit I un point fixé, on appelle symétrie centrale de centre I et on note S_I, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point I invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.

$$\boldsymbol{S_I(M) = M' \Leftrightarrow I = M * M' \Leftrightarrow \begin{cases} S_I(M) = M' \\ et \\ S_I(I) = I \end{cases}}$$



Application 9 :

Soit ABC un triangle quelconque.

1°/ Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.

2°/ Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

La symétrie centrale conserve ;

La distance : (la symétrie centrale est une isométrie)

$S_I(M,N) \longrightarrow (M',N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Le parallélisme :

$(\Delta_1) // (\Delta_2)$ et $S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) // (\Delta'_2)$

L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ et $S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$

L'alignement

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_I(A)$, $S_I(B)$et$S_I(C)$ sont alignés.

Le contact

$F = E \cap G \Longrightarrow S_I(F) = S_I(E) \cap S_I(G)$.

Le barycentre de deux points ou plus

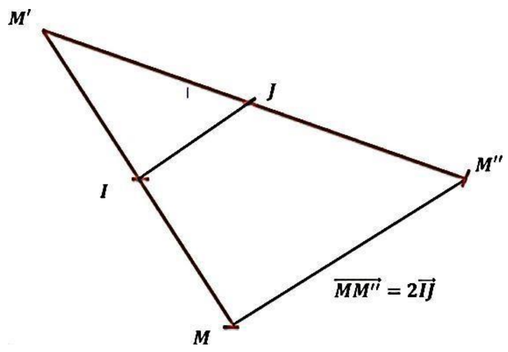
A	B	C
α	β	γ

$S_I(A)$	$S_I(B)$	$S_I(C)$
α	β	γ

La composée de deux symétries centrales

$M: S_I \longrightarrow M': S_J \longrightarrow M''$

$\Longrightarrow M \longrightarrow S_J \circ S_I \longrightarrow M''$



$S_I(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$,

$S_J(M') = M'' \Longrightarrow M'M'' = 2M'J$ $= 2\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$.

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'J}$ Donc ; $\boldsymbol{S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$.

Application10 :

$ABCD$ est un parallélogramme.

Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Expression analytique d'une symétrie centrale

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\ }, \vec{\ })$, soit le point $I(x_I, y_I)$.

Un point $M(x, y)$ du plan a pour image un point $M'(x', y')$ par la symétrie S_{I}, signifie que ;

$S_{\mathrm{I}}(M) = M' \Longrightarrow \mathrm{I} = M * M'$;

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x' + x}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y' + y}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_{\mathrm{I}} - x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_{\mathrm{I}} - y} \end{cases}.$$

Cette écriture est l'expression analytique de la symétrie centrale de centre **I**.

IV. Similitudes planes

1. Generalites

a) Définition d'une similitude

Une similitude de rapport k (k réel, k > 0) est une transformation du plan qui multiplie les distances par k. C'est une transformation du plan qui conserve les rapports de distances. Pour tous points A et B d'images A' et B', on a $\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}$ = k .

Exemple : Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport k si k est positif, et de rapport
- k si k est négatif.

b) Définition d'une isométrie

Une isométrie est une similitude de rapport 1. C'est donc une transformation qui **conserve les distances.**

Exemples : Les rotations, les translations, les réflexions sont des isométries car ce sont des transformations qui conservent les distances.

c) Propriétés

Soit s une similitude de rapport k et soient A', B' et C' les images de A, B et C par S. Nous avons les propriétés suivantes :

Une similitude conserve les angles géométriques : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$

Pour le produit scalaire : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}^2$

d) Composition

La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

La composée de deux similitudes de rapports k et m est une similitude de rapport k × m

La composition de deux similitudes n'est pas commutative en général. Soit s_1 et s_2 deux similitudes. La composée $s_1 \circ s_2$ n'est en général pas égale à la composée $s_2 \circ s_1$.

2. Similitudes

a) Ecritures complexes

Similitude

Les similitudes du plan sont les transformations d'écriture complexe :

$z' = az + b$ ou $z' = az + b$ (avec a et b des complexes fixés, et a non nul).

Le rapport de la similitude est le module de a.

Isométrie

Les isométries du plan sont les transformations d'écriture complexe :

$z' = e^{i\theta} z + b$ ou $z' = e^{i\theta} z + b$ (avec b un nombre complexe, θ un réel).

b) Propriétés géométriques

Conservation de la forme géométrique

Une similitude transforme un segment en segment, une droite en une droite, un cercle en un cercle.

Une similitude de rapport k transforme le cercle de centre O de rayon R en un cercle de centre O' (image de O par la similitude) de rayon kR .

Conservation de propriétés géométriques

Une similitude conserve l'orthogonalité, le parallélisme, le contact et le barycentre.

Aires

Une similitude de rapport k multiplie les aires par k^2.

c) Décomposition

Une similitude peut s'écrire comme la composée de translations, de rotations, de réflexions et d'homothéties.

d) Similitude fixant deux points distincts

Une similitude s ayant deux points fixes A et B distincts (c'est à dire telle que s(A) = A et s(B) = B) est soit l'**identité**, soit la **réflexion d'axe (AB)**.

3. Similitude directe

a) Définitions

Les similitudes d'écriture **z' = az + b** (avec a et b des complexes fixés, a non nul) **conservent les angles orientés** et sont appelées **similitudes directes.**

Si $|a| = 1$ alors ce sont des isométries que l'on nomme **déplacements.**

Les translations et les rotations sont les seuls déplacements.

b) Caractérisation géométrique

Soient Ω un point du plan, θ et k deux réels, k > 0, a≠ 1. On appelle **similitude directe de centre Ω , d'angle** θ **et de rapport k**, l'application du plan dans lui-même qui fixe le point Ω et qui à chaque point M distinct de Ω associe le point M' définit par :

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ [2\pi]$ et Ω M'= kΩ M.

La similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k (k > 0) est la composée de l'homothétie de centre Ω , de rapport k et de la rotation de même centre et d'angle θ .

Réciproquement, la composée de l'homothétie de centre Ω , de rapport k (k réel quelconque) et de la rotation de même centre et d'angle θ est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ si k > 0 , ou de rapport –k et
d'angle θ+π si k < 0.

c) Propriété

Étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A soit distinct de B et A' soit distinct de B'.

Il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

d) Forme réduite

Soit S la similitude directe d'écriture complexe z' = az + b, où a et b sont des nombres complexes, a non nul :

- Si a = 1, alors S est une translation de vecteur d'affixe b.
- Si a ≠ 1, alors S est la composée de l'homothétie de centre Ω de rapport k = |a|, et de la rotation de même centre Ω d'angle θ = Arg(a) [2π] . Ω est le point dont l'affixe est solution de l'équation z = az + b (seul point fixe de S).

L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k ($k > 0$) est :

$z' - w = ke^{i\theta}(z - w)$ où   w est l'affixe du point Ω .

Cette écriture s'appelle la **forme réduite de S**, composée d'une rotation et d'une homothétie.

e) Récapitulatif des écritures complexes

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur u	$z' = z + b$ u d'affixe b
Homothétie de centre Ω , de rapport k	$z' - w = k(z - w)$ Ω d'affixe w
Rotation de centre Ω , d'angle θ	$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ Ω d'affixe w
Similitude directe de centre Ω , d'angle θ , de rapport k ($k > 0$) (composée d'une homothétie et d'une rotation)	$z' - w = ke^{i\theta}(z - w)$ Ω d'affixe w

Soit S une transformation s'écrivant sous la forme complexe : $\mathbf{z' = az + b}$ (avec a et b des complexes fixés, a non nul) :

- Si a est un réel avec $a = 1$: S est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si a est un réel avec $a \neq 1$: S est l'homothétie de centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) de rapport a.
- Si a est un complexe non réel avec $a = 1$: S est la rotation de centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) d'angle $\theta = \mathrm{Arg}(a)\ [2\pi]$.
- Si a est un complexe non réel avec $a \neq 1$: S est la similitude directe de Centre Ω d'affixe w (telle que $w = aw + b$) d'angle $\theta = \mathrm{Arg}(a)\ [2\pi]$ et de rapport $k = a$.

Application 11 :

ABCD est un carré de sens direct et de centre O avec ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$)= $\frac{\pi}{2}$

a- Déterminer la similitude directe S de centre D qui transforme O en C.

b- Quelle est l'image du point A ?