ALGEBRE : Equation du troisième degré

Table des matières

Partie II : Equation du 3ème degré

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Résoudre des équations du 3ème degré, connaissant une racine. • Résoudre des équations et inéquations irrationnelles et avec des valeurs absolues.	• Equations de degré 3 • Equations et inéquations irrationnelles • Equations et inéquations avec des valeurs absolues.	On traitera la méthode d'identification et la division Euclidienne. On résoudra les équations de degré 3 dont on connaît une racine • On ne traitera pas les équations de degré 3 et irrationnelles avec paramètre

Définition

On dit aussi que α est racine de l'équation P de degré 3, défini par

> Une équation du troisième degré est une équation de la forme ax3+bx2+cx+d=0 où a, b, c et d sont des nombres réels, avec a≠0
>
> Un réel α est une solution de l'équation si aα3+bα2+c α+d=0

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

I. Factorisation

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Pour un réel α , $P(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\,\alpha+d$

On a alors $P(x)-P(\alpha)=a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)$

Puisque $(x^3-\alpha^3)=(x-\alpha)(x^2+\alpha\,x+\alpha^2)$ et $(x^2-\alpha^2)=(x-\alpha)(x+\alpha)$,

on a $P(x)-P(\alpha)=a(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)+b(x-\alpha)(x+\alpha)+c(x-\alpha)$

$= (x-\alpha)(a(x^2+\alpha\,x+\alpha^2)+b(x+\alpha)+c)$

$P(x)-P(\alpha)=(x-\alpha)(ax^2+(a\alpha+b)x+(\alpha^2+b\alpha+c))$

$P(x)-P(\alpha)$ est de la forme $P(x)-P(\alpha)=(x-\alpha)(\,p\,x^2+q\,x+r)$ où p, q et r sont des nombres réels

On a donc quels que soit les réels x et α , $P(x)=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+P(\alpha)$

Ainsi si α est racine de P, $P(\alpha)=0$, et $P(x)=(x-\alpha)(p\,x^2+q\,x+r)$

II. Théorème

Soit P une équation de degré trois.

Un réel α est une racine de P si et seulement s'il existe trois réels p, q et r tels que

$P=(x-\alpha)(p\,x^2+q\,x+r) = 0$

III. Résolution

Soit $P = ax^3+bx^2+cx+d = 0$ et α une racine de P.

On cherche les réels p, q et r tels que $(x-\alpha)(p\,x^2+q\,x+r)=0$ par la méthode des coefficients indéterminés ou par division euclidienne

On a P =0 si et seulement si $x-\alpha=0$ ou $px^2+q\,x+r=0$.

Pour pour achever la résolution, il reste à résoudre l'équation $px^2+q\,x+r=0$

<u>Exemple</u>

Résoudre l'équation $x^3-6x^2+x+4=0$ sachant que 1 est racine.

Réponse :

1 est racine donc, il existe des réels p, q et r tels que $x^3-\,x^2+6x+4=(x-1)(\,px^2+q\,x+r)$

En développant le second membre de l'égalité, on a : $x^3-6\,x^2+x+4=px^3+(q-p)\,x^2+(r-q)x-r$ **.**

$p=1$

Par identification des coefficients des termes de même degré, on a

$$\begin{cases} q-p=-6 \\ r-q=1 \\ -r=4 \\ p=1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p=1 \\ q=-5 \\ r=-4 \end{cases}$$

$x^3-2x^2+x+4=(x-1)(x^2-5x-4)$

$x^3-6\,x^2+x+4=0$ si et seulement si $(x-1)(x^2-\,5x-4)=0$, donc si et seulement si

$x-1=0$ ou $x^2-\,5x-4=0$

$\boldsymbol{x=1}$

Résolvons la dernière équation $x^2-\,5x-4=0$.

$\Delta=(-5)^2-4(1)(-4)=41>0$

On a donc deux racines distinctes $x'=\frac{5-\sqrt{41}}{2}$ et $x'=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

Finalement l'ensemble des solutions est $S=\left\{\frac{5-\sqrt{41}}{2}\ ;1\ ;\ \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right\}$

Application 4 : Soit f définie par :

$f(x)= x^3-4x+3$

1. Calculer $f(1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) =(x-1)\ (x^2+ax+b)$
3. En déduire les racines de f.