

# LOGIQUE

## Table des matières

|      |                                                  |   |
|------|--------------------------------------------------|---|
| I.   | Rappel.....                                      | 2 |
| 1.   | Langage du calcul propositionnel.....            | 2 |
| 2.   | La syntaxe du langage propositionnel .....       | 2 |
| a)   | L'alphabet.....                                  | 2 |
| b)   | Les règles d'écriture.....                       | 3 |
| II.  | Les connecteurs logiques .....                   | 3 |
| 1.   | Le connecteur « et ».....                        | 3 |
| 2.   | Le connecteur « ou ».....                        | 3 |
| 3.   | Le connecteur « implique » .....                 | 4 |
| 4.   | Le connecteur « équivalent » .....               | 4 |
| III. | Négation d'une proposition .....                 | 4 |
| 1.   | Négation d'une proposition P .....               | 4 |
| 2.   | Implication : $P \Rightarrow Q$ .....            | 5 |
| IV.  | Quantificateurs .....                            | 6 |
| V.   | Réciproque et contraposé d'une implication ..... | 7 |
| 1.   | Implication.....                                 | 7 |
| 2.   | Implication réciproque d'une implication .....   | 7 |
| 3.   | Contraposée d'une implication.....               | 7 |
| 4.   | Equivalence.....                                 | 8 |
| 5.   | Condition nécessaire et suffisante.....          | 8 |

# I. Rappel

## 1. Langage du calcul propositionnel

Le calcul des propositions ou calcul propositionnel est une théorie logique ayant pour objet l'étude des relations logiques entre « propositions » et définissant les lois formelles selon lesquelles, au moyen de connecteurs logiques, les propositions se coordonnent et s'enchaînent pour produire des raisonnements valides.

En logique mathématique, le calcul des propositions est la première étape dans la définition de la logique et du raisonnement. Il définit les règles de déduction qui relient les propositions entre elles, sans en examiner le contenu ; il est ainsi une première étape dans la construction du calcul des prédicats, qui lui s'intéresse au contenu des propositions et qui est une formalisation achevée du raisonnement mathématique. Le calcul des propositions est parfois appelé logique des propositions, logique propositionnelle ou calcul des énoncés, et parfois théorie des fonctions de vérité.

Le langage propositionnel est composé de formules représentant des propositions. Comme les autres langages, le langage du calcul propositionnel est caractérisé par sa syntaxe et sa sémantique vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. Il est reconnu syntaxiquement correct ;
2. Il est sémantiquement correct ;
3. Il est possible de lui assigner sans ambiguïté une valeur de vérité (vrai ou faux).

**Exemple 1** : 13 est un nombre premier.

Un littéraire attribuera à cette phrase la propriété (1) mais sans doute pas la propriété (2). Ce n'est donc pas une proposition.

**Exemple 2** : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Les propriétés (1, 2 et 3) sont vérifiées : c'est une proposition (vraie).

**Exemple 3** : Le facteur est-il arrivé ?

Les propriétés (1) et (2) sont vérifiées, mais pas la (3). Ce n'est donc pas une proposition.

## 2. La syntaxe du langage propositionnel

### a) L'alphabet

L'alphabet est composé des symboles du langage. Il comporte :

- Un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On convient d'utiliser les lettres de l'alphabet latin (a, b, c ...) éventuellement indicées.

- Des connecteurs logiques ( $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ). Cette liste n'est pas exhaustive, elle peut changer d'un enseignant à un autre ou d'une université à une autre.
- Des symboles auxiliaires.

## b) Les règles d'écriture

Les règles d'écriture précisent la manière dont sont assemblés les symboles de l'alphabet pour former des expressions bien formées (ou formules) du langage propositionnel :

1. Toute variable propositionnelle est une formule ;
2. Si  $\alpha$  est une formule,  $\neg\alpha$  (ou  $\alpha$ ) est une formule ;
3. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des formules,  $(\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha \Rightarrow \beta)$  et  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$  sont des formules ;
4. Une expression n'est une formule que si elle est écrite conformément aux règles 1, 2 et 3.

Exemple :  $p, q, r$  sont des variables propositionnelles, donc des formules.

2.  $p \vee q$  est une formule.
3.  $p \Rightarrow (q \neg r)$  n'est pas une formule.

## II. Les connecteurs logiques

Les connecteurs sont présentés avec leur interprétation en logique classique.

### 1. Le connecteur « et »

Pour deux propositions  $p$  et  $q$ , la proposition  $p$  et  $q$  noté  $p \wedge q$  est la proposition qui est vraie si  $p$  et  $q$  le sont et fausse dans les autres cas. Sa table de vérité est :

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| V   | V   | V            |
| V   | F   | F            |
| F   | V   | F            |

### 2. Le connecteur « ou »

Pour deux propositions  $p$  et  $q$ , la proposition  $p$  ou  $q$  noté  $p \vee q$  est la proposition qui est fausse si  $p$  et  $q$  le sont et vraie dans les autres cas. Sa table de vérité est :

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | V          |

|   |   |   |
|---|---|---|
| F | V | V |
| F | F | F |

### 3. Le connecteur « implique »

Pour deux propositions  $p$  et  $q$ , la proposition « si  $p$  alors  $q$  » ( $p$  implique  $q$ ) notée  $p \Rightarrow q$ , est la proposition qui est fausse si  $p$  est vraie et  $q$  fausse, et vraie dans les autres cas. Sa table de vérité est :

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| V   | V   | V                 |
| V   | F   | F                 |
| F   | V   | V                 |
| F   | F   | V                 |

Lorsque la proposition «  $p \Rightarrow q$  » est vraie, on dit que  $p$  est une condition suffisante pour la réalisation de  $q$ , et que  $q$  est une condition nécessaire pour la réalisation de  $p$ .

En effet, pour que  $q$  soit vraie, il suffit que  $p$  le soit, et que si  $p$  est vraie, alors « nécessairement »  $q$  est vraie.

### 4. Le connecteur « équivalent »

La proposition  $p \Leftrightarrow q$  est la proposition  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ . On lit «  $p$  est équivalent à  $q$  » ou bien «  $q$  équivaut à  $q$  » ou bien «  $p$  si et seulement  $q$  ».

## III. Négation d'une proposition

### 1. Négation d'une proposition P

- La négation logique transforme une propriété vraie en une propriété fausse ; une propriété fausse en une propriété vraie ; une propriété en une nouvelle propriété qui est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas la première.

- Comprendre que si  $P$  est vraie, alors non  $P$  est fausse  
si  $P$  est fausse, alors non  $P$  est vraie

- La négation d'une proposition n'est pas son « contraire ».  
(même si des fois cela peut être le cas)

- Savoir nier une proposition

Soit  $P$  une proposition. On définit sa négation, notée  $\neg P$  (ou aussi non  $P$  ou  $\neg P$ ), à partir de sa table de vérité.

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| V   | F        |
| F   | V        |

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase «  $f$  est la fonction nulle » est, non pas «  $f$  ne s'annule pas », mais «  $f$  n'est pas la fonction nulle » ou encore «  $f$  ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase «  $x \geq 0$  » est «  $x < 0$  », et non pas «  $x \leq 0$  ».

## 2. Implication : $P \Rightarrow Q$

- non  $P$  ou  $Q$
- tables de vérité de  $P \Rightarrow Q$
- comprendre que  $P \Rightarrow Q$  est vraie lorsque  $P$  est fausse
- équivalence avec la contraposée :  $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$
- savoir nier une implication :  $P$  et non  $Q$  La négation d'une implication n'est pas une implication
- condition nécessaire, condition suffisante

Application 1 : Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2. Certains nombres entiers sont pairs.

Solution 1 :

1. Il existe une boule qui n'est pas rouge dans l'urne. (La négation de « pour tout » est « il existe » et la négation « rouge » est « n'est pas rouge »).
2. Tous les nombres entiers sont pairs. (La négation de « il existe » (dans l'énoncé « certains » signifie « il existe ») est « tous ». Dans cette question on ne se demande pas si la proposition est vraie ou fausse.

## IV. Quantificateurs

Une proposition mathématique est un énoncé qui est vrai ou faux, il n'y a pas d'autre alternative. Ce n'est pas le cas de toutes les propositions en langage courant, par exemple : « Bonjour » ou « Dis-le moi ! » ne sont ni vraies ni fausses mais « il pleut » ou « je suis en cours de maths » sont des propositions qui peuvent être vraies ou fausses.

Le langage courant est souvent ambigu : la phrase : « Tous les musées sont fermés certains jours » signifie-t-elle « certains jours, tous les musées sont fermés » ou signifie-t-elle « chaque musée est fermé certains jours », ce qui est tout à fait différent ?

En mathématiques, pour pouvoir affirmer avec certitude qu'une propriété est vraie ou fausse, il ne peut pas y avoir d'ambiguïté. C'est pourquoi il est nécessaire d'adopter un langage précis spécifique aux mathématiques.

Les quantificateurs servent à indiquer pour quels objets (certains, tous) une propriété est vraie.

### Quantificateur universel : $\forall$

Il signifie « Quel que soit », « pour tout » « pour n'importe quel ».

### Quantificateur existentiel : $\exists$

Il signifie : « Il existe au moins un » et se lit « il existe ».

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental. Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs, le sens change. Par exemple dans les phrases « Pour toutes les salles, il existe une clé qui ouvre la porte » et « Il existe une clé qui, pour toutes les salles, ouvre la porte », parle-t-on de la même clé ?

Exemple : Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1)  $f$  est la fonction nulle (où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).  
Réponse :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ .
- 2) Le dénominateur  $D$  de  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .  
Réponse :  $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0$ .
- 3)  $f$  est l'identité de  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).  
Réponse :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ .
- 4) Le graphe de  $f$  coupe la droite d'équation  $y = x$ .  
 $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x$ .
- 5)  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  (où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).  
 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$ .

Application 2: On considère la proposition  $(P)$  suivante :

$(P)$  « Pour tout nombre réel  $x$ , il existe au moins un entier naturel  $N$  supérieur ou égal à  $x$  »

1. Ecrire la proposition  $(P)$  avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Solution 2 :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq x$

1.  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, N < x$ . Il existe un réel tel que pour tout  $N$  entier,  $N$  est strictement inférieur à  $x$ .

## V. Réciproque et contraposé d'une implication

### 1. Implication

La proposition "Si  $P$  alors  $Q$ " est appelée implication.

Pour établir que "Si  $P$  alors  $Q$ " est vraie, on suppose que  $P$  est vraie et on démontre qu'alors  $Q$  est vraie.

**Exemple :** Si  $x = 2$  alors  $x^2 = 4$ .

### 2. Implication réciproque d'une implication

La réciproque de "Si  $P$  alors  $Q$ " est "Si  $Q$  alors  $P$ ".

Lorsque "Si  $P$  alors  $Q$ " est vraie alors sa réciproque peut-être vraie ou fausse.

**Exemples :**

- Si  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . La réciproque est : si dans un triangle  $ABC$ ,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  alors ce triangle est rectangle en  $A$ . La réciproque est vraie.
- Si  $x = 2$  alors  $x^2 = 4$ . La réciproque est si  $x^2 = 4$  alors  $x = 2$ . La réciproque est fausse car on peut avoir aussi  $x = -2$ .

### 3. Contraposée d'une implication

La contraposée de "Si  $P$  alors  $Q$ " est "Si (Non  $Q$ ) alors (Non  $P$ )". Exemple :

**Exemple :** La contraposée du théorème de Pythagore

**Théorème :** Si  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

**Contraposée :** Si dans un triangle  $ABC$  on a  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \neq 0$  alors le triangle  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

## 4. Equivalence

La proposition "P si et seulement Q" (ou "P équivalent à Q") est la proposition "Si P alors Q" et "Si Q alors P".

**Exemple :** "Le triangle est isocèle" équivaut à "Le triangle possède deux angles égaux" .

$x = 2$  ou  $x = -2$  équivaut à  $x^2 = 4$ .

## 5. Condition nécessaire et suffisante

Quand l'implication "P implique Q" est vraie

P est une condition suffisante pour Q

Il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie

Q est une condition nécessaire pour P

Il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie

**Exemple :**

Si le quadrilatère ABCD est un losange alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Il suffit que le quadrilatère ABCD soit un losange pour que ABCD soit un parallélogramme.

Il faut que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme pour que ABCD puisse être un losange.

Application 3: Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la contraposée de cette phrase logique.

Solution 3 : La contraposée est :  $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha, \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$