ANALYSE : Etude et traçage de la courbe

Table des matières

Partie IV: ETUDE ET TRACAGE DE LA COURBE

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
• Tracer la courbe représentative d'une fonction.	- Equation de la tangente en un point - variation - Positions relatives de deux courbes - Points remarquables : point d'inflexion, point d'intersection avec les axes, centre de symétrie - Traçage de la courbe représentative d'une fonction numérique	On introduira graphiquement la notion de tangente en un point d'une courbe. • Fonctions : polynôme, rationnelle, à valeur absolue, multiforme, irrationnelle. • Fonction trigonométrique du type : <u>Exemple</u> : $x \to sinx$ $x \to cosx$ $x \to tanx$ $x \to Acos\,(ax+b)$ $x \to \text{Asin}\,(ax+b)$

I. Tangente à une courbe en un point.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable en $\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{C})$ sa courbe représentative et A le point de $(\boldsymbol{C})$ d'abscisse $\boldsymbol{a}$.

La tangente à la courbe $(\boldsymbol{C})$ au point A $(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ est la droite passant par A de coefficient directeur $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{a})$.

II. Equation de la tangente.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable en a, (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse a.

La tangente à la courbe (C) au point A a pour équation :

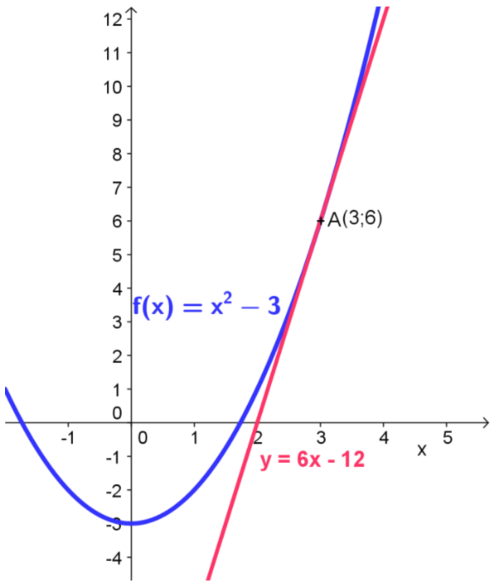
$$\boldsymbol{y = f'(a)\ (x - a) + f\ (a)}$$

Remarque : La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage du point A.

Exemple 1 : Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :

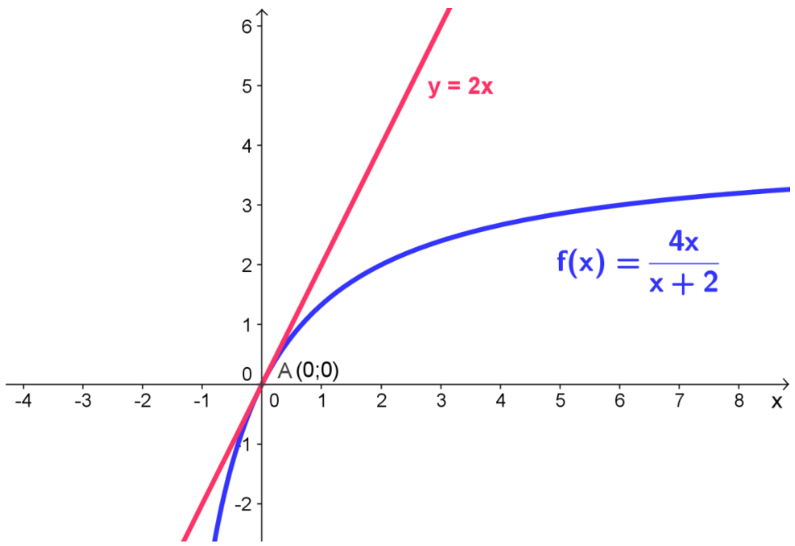
$y = 6(x - 3) + 6$ soit $y = 6x - 12$



Exemple 2 : Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f définie par

$f\,(x)\ =\ \dfrac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est :$y\ =\ 2x$



III. Position relative de deux courbes

Supposons que nous ayons à disposition deux fonctions g et f de courbes associées C_f et C_g. Nous souhaiterions savoir à quel moment la courbe C_f se trouve au dessus de la courbe C_g (et vice versa).

Voici comment procéder :

La position relative entre deux courbes C_f et C_g est donnée par le signe de la différence f(x) − g(x) :

Si $f(x) - g(x) > 0$ sur un ensemble I, C_f est au dessus (strictement) de C_g sur cet ensemble de points.

Si $f(x) - g(x) = 0$ sur un ensemble I, C_f coupe C_g sur cet ensemble de points.

Si $f(x) - g(x) < 0$ sur un ensemble I, C_f est au dessous (strictement) de C_g sur cet ensemble de points.

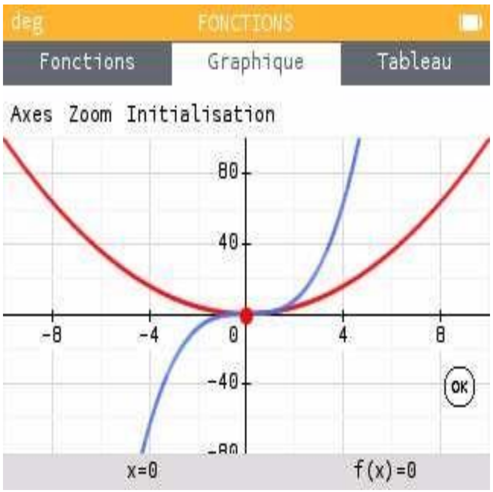
Exemple : Comparons la position relative de $f : x \text{"}\!\longrightarrow x^2$ et $g : x \text{"}\!\longrightarrow x^3$. Pour cela, nous étudions le signe de

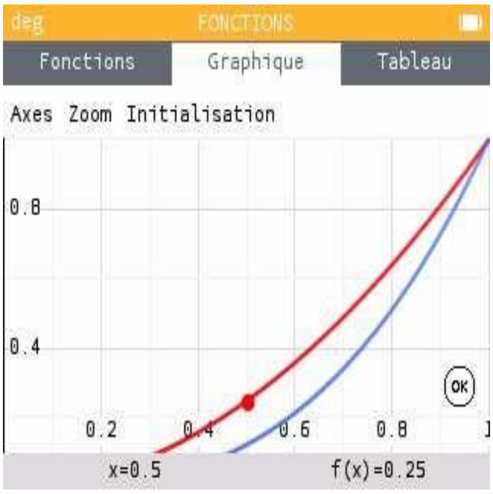
$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$

Où la dernière expression est obtenue en factorisant par le facteur commun x^2. Nous obtenons alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

En résumé, C_f est au dessous de C_g lorsque $x \in]1;+\infty[$, C_f coupe C_g aux points $x = 1$ et $x = 0$, sinon C_f est au dessus de C_g.





IV. Représentation graphique d'une fonction

1) Fonction du second degré

Pour ce faire, commençons par rappeler ce que nous entendons par une fonction du second degré : il s'agit d'une fonction polynomiale du deuxième degré à variable unique. Cela signifie que les fonctions du second degré ont la forme $f(x)=ax+bx+c$, pour certaines constantes a, b et c avec a non nul. Une équation du second degré est une équation sous la forme $y=f(x)$ avec $f(x)$ une fonction du second degré.

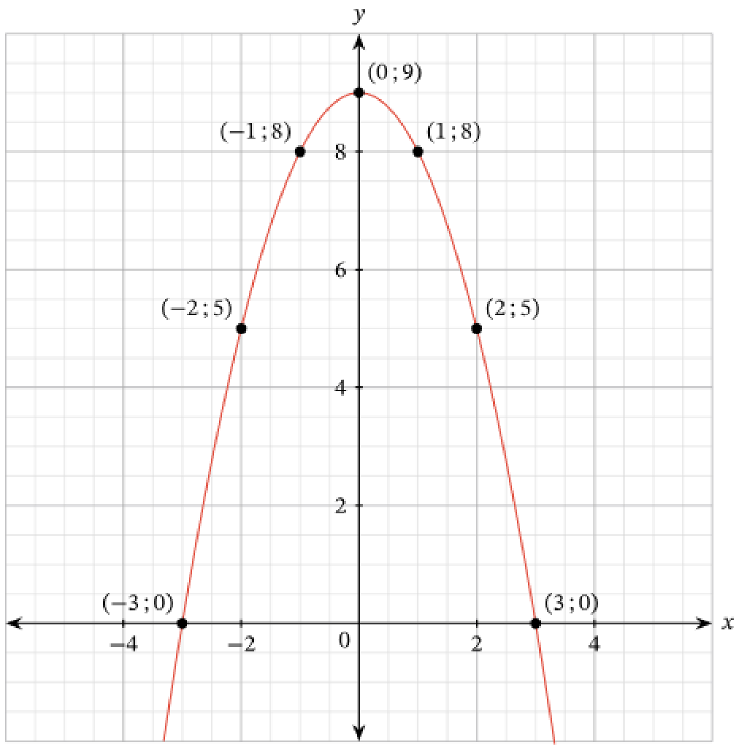
Par exemple, disons que nous voulons tracer $y= -x+9$, avec $-3 \leqslant x \leqslant 3$.Nous construisons un tableau des valeurs de x et nous calculons les résultats correspondants de $f(x)=-x+9$.

On peut calculer $f(-3)$ en remplaçant x=−3 dans la fonction comme suit : $f(-3)= -(-3) + 9 = -9 + 9 = 0$.

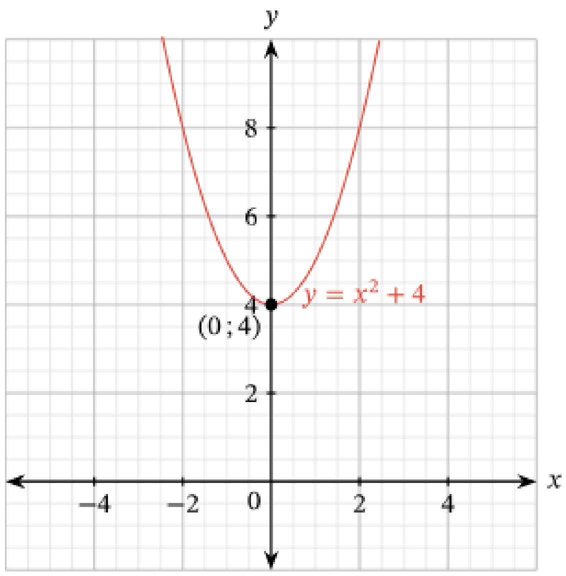
Nous suivons le même processus pour tous les entiers dans l'intervalle donné pour obtenir le tableau suivant.

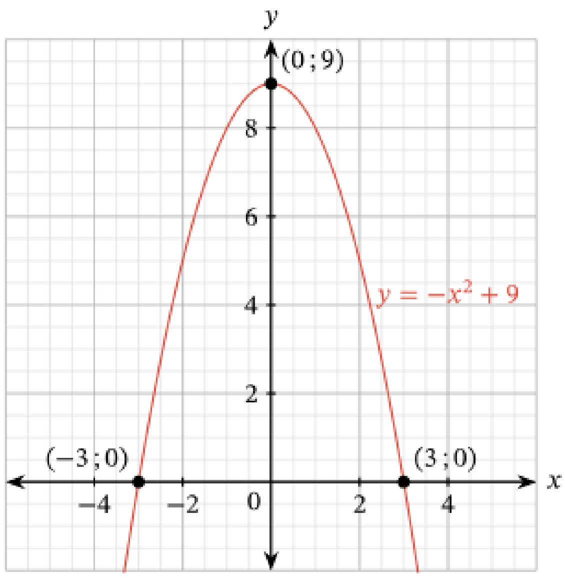
$\boldsymbol{x}$	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\boldsymbol{f(x)}$	0	5	8	9	8	5	0

Chaque colonne du tableau nous donne les coordonnées d'un point sur le graphique de $y=-x+9$.Nous pouvons tracer ces points sur un repère, puis réaliser **une parabole** avec les points afin de tracer la courbe $y= -x+9$.



On comprend mieux les équations du second degré en regardant leurs courbes. Par exemple, regardons les graphiques des deux équations du second degré : $y= x+4$ et $y= -x+9$.





Notons que ces graphiques ont une forme très similaire, connue sous le nom de parabole. En fait, toutes les équations du second degré ont cette forme et le signe de la constante a nous indique si la parabole s'ouvre vers le haut ou le bas.

Si $a>0$, alors la parabole s'ouvre vers le haut, et si $a<0$, la parabole s'ouvre vers le bas. Nous pouvons le voir sur les deux graphiques donnés ; le premier affiche un coefficient directeur positif et sa courbe s'ouvre vers le haut, tandis que le seconde affiche un coefficient directeur négatif et sa courbe s'ouvre vers le bas.

Il y a aussi de nombreux points utiles que nous pouvons identifier pour nous aider à déterminer et à transmettre des informations sur les graphiques.

Premièrement, nous rappelons que l'intersection d'un graphique avec l'axe des y sera le point sur le graphique où $x=0$, où la courbe coupe l'axe des y. Dans le premier graphique, il s'agit de (0 ;4), et dans le second, c'est (0 ;9). Cela nous indique les résultats de l'équation du second degré pour $x=0$.

Il est à noter que nous pouvons trouver l'intersection avec l'axe des y de la courbe de la fonction $f(x)=ax+bx+c$ pour $x=0$.Nous avons $f\ (0)\ =a\times0+b\times0+c=c$.Donc, l'intersection avec l'axe des y est (0 ; c).

Deuxièmement, les intersections de la courbe avec l'axe des x sont les points sur le graphique avec $y=0$, là où la courbe coupe l'axe des x. On peut voir que la première courbe ne coupe pas l'axe des x et la seconde coupe l'axe en deux points (−3 ;0) et (3 ;0). Les abscisses x pour ces points nous indiquent les valeurs pour lesquelles la fonction donne 0.

Il est à noter que puisque les ordonnées y pour les intersections avec l'axe des x sont égales à 0, on ne parle souvent que des abscisses x de ces points. Par exemple, on pourrait dire que l'intersection avec l'axe des x pour le deuxième graphique est en −3 et 3. De la même manière, on pourrait dire que l'intersection avec l'axe des y de la deuxième courbe est en 9.

Propriétés : Fonctions du second degré et leurs graphiques

- Les fonctions du second degré ont la forme $f(x)=ax+bx+c$, pour certaines constantes a, b et c, avec a non nul.
- Toutes les courbes du second degré ont **une forme parabolique**. Si $a>0$, alors la courbe de la fonction du second degré s'ouvrira vers le haut ; si $a<0$, alors la courbe de la fonction du second degré s'ouvrira vers le bas.
- Tous les courbes des fonctions du second degré ont l'intersection avec l'axe des y au point (0; c) ; c'est le point où le graphique coupe l'axe des y.
- Les courbes des fonctions du second degré peuvent avoir 0, 1 ou 2 points d'intersection avec l'axe des x. Ce sont les points où le graphique coupe l'axe des x. Les abscisses x de ces points nous indiquent les valeurs pour lesquelles la fonction a pour résultat 0.
- Toutes les courbes du second degré ont un seul point où la courbe change de direction appelé sommet. Le signe de a nous indique si le point où la courbe change de direction sera un maximum ou un minimum.
- Toutes les paraboles sont symétriques par rapport à la droite verticale passant par leur sommet. L'axe de symétrie se situe à mi-chemin entre l'intersection avec l'axe des x (si la parabole coupe l'axe des x).

2) Fonction à valeur absolue

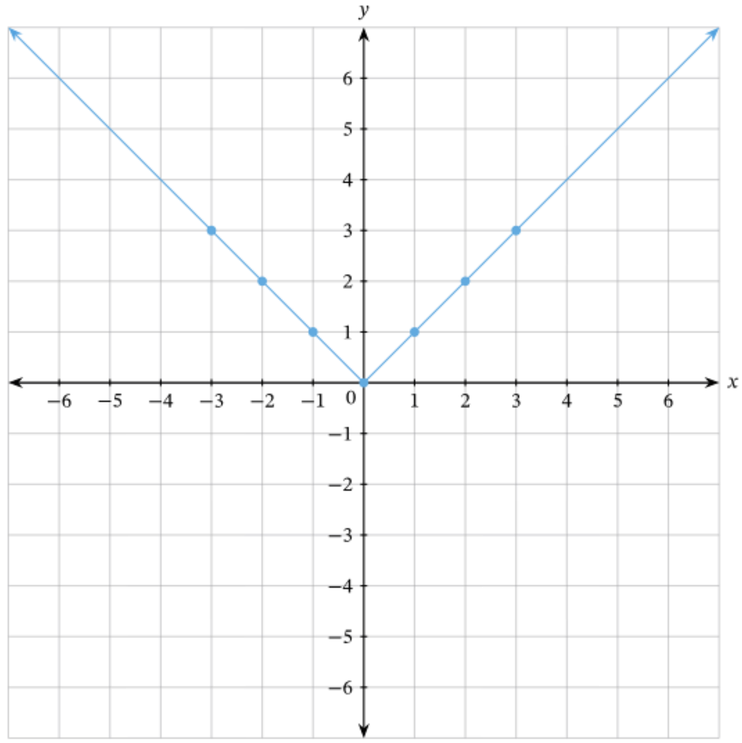
Une fonction de valeur absolue est une fonction dont la définition contient une expression algébrique à l'intérieur des symboles de valeur absolue.

a) $g(x) = |x|$

Une façon de représenter graphiquement une fonction de valeur absolue consiste à entrer des valeurs dans la fonction puis à enregistrer les valeurs de sortie résultantes dans un tableau de valeurs. Pour la fonction $g(x) = |x|$, où $x \in \mathbb{R}$, un tel tableau est indiqué ci-dessous :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	3	2	1	0	1	2	3

En représentant ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé puis en traçant les droites passant par ces points, on peut créer la représentation graphique en forme de V de $y=g(x)$ ci-dessous :

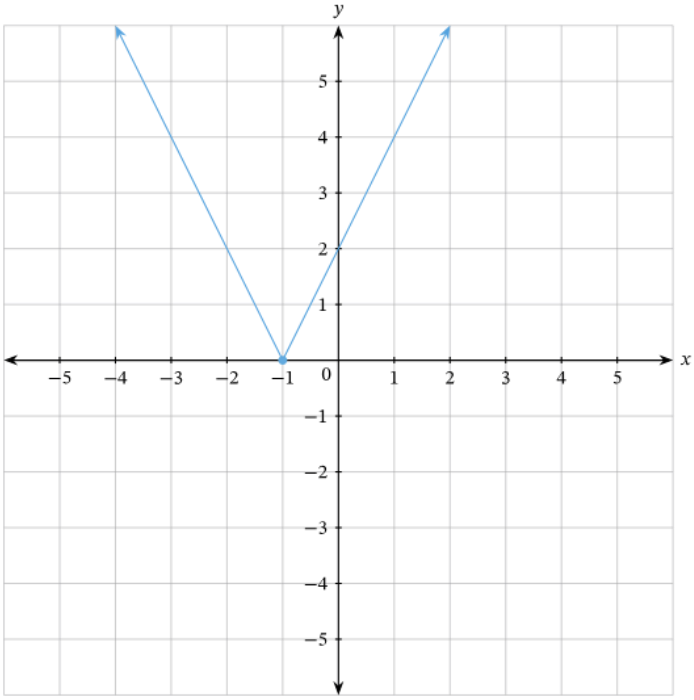


Propriétés : Fonction valeur absolue $g\ (x)$ = | x | et sa représentation graphique

- Sommet : (0;0)
- Axe de symétrie : x=0
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$, également noté $(-\infty;+\infty)$
- Ensemble image : $g(x)\geqslant 0$, également noté $[0;+\infty[$
- Intersection avec l'axe des abscisses x : 0
- Ordonnée à l'origine y : 0

b) $f(x)=|-mx-b|$

Exemple : $f(x)=|-2x-2|$



On voit que la représentation graphique a un sommet en $(-1;0)$,un axe de symétrie en $x=-1$,une intersection avec l'axe des abscisses x de -1,et une ordonnée à l'origine y de 2. En entrant des valeurs de x dans la fonction $f(x)=|-2x-2|$ et en observant les valeurs de sortie, on peut confirmer la validité de la représentation graphique.

On utilise alors la représentation graphique pour déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble image de $f(x)$. On rappelle que l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs d'entrée possibles, tandis que l'ensemble image est l'ensemble de toutes les valeurs de sortie possibles. Une autre façon de le dire est que l'ensemble de définition correspond à toutes les valeurs possibles de la variable indépendante, tandis que l'ensemble image correspond à toutes les valeurs possibles de la variable dépendante.

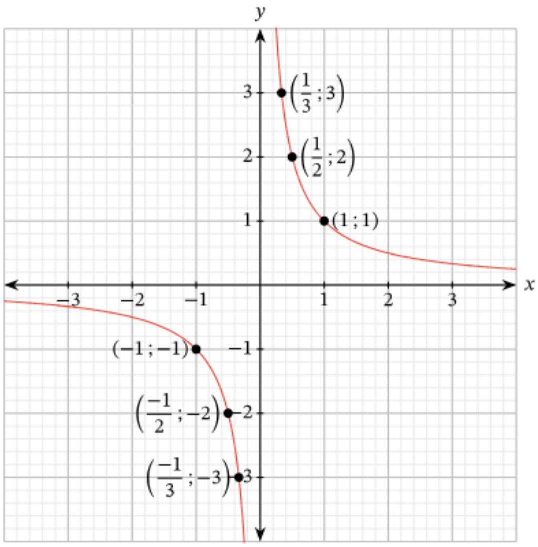
Les flèches indiquent que la représentation graphique s'étend indéfiniment vers la gauche et la droite, donc on sait que l'ensemble de définition doit être l'ensemble de tous les nombres réels, soit $\mathbb{R}$.Les flèches indiquent également que la représentation graphique s'étend indéfiniment vers le haut, mais on peut voir qu'elle se situe uniquement sur ou au-dessus de l'axe des abscisses x.En d'autres termes, la plus petite valeur de y est 0, mais il n'y a pas de plus grande valeur. On sait donc que l'ensemble image est $f(x)\geqslant 0$,soit $[0;+\infty[$.

3) Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction définie par une fraction algébrique où le numérateur et le dénominateur du quotient sont des polynômes.

a) Représentation graphique de $y = \frac{1}{x}$.

On note les valeurs y correspondant à x= 1;2;3 sur le graphique. De même, on note les valeurs y correspondant à x= −1 ; −2 ; −3 sur le graphique.



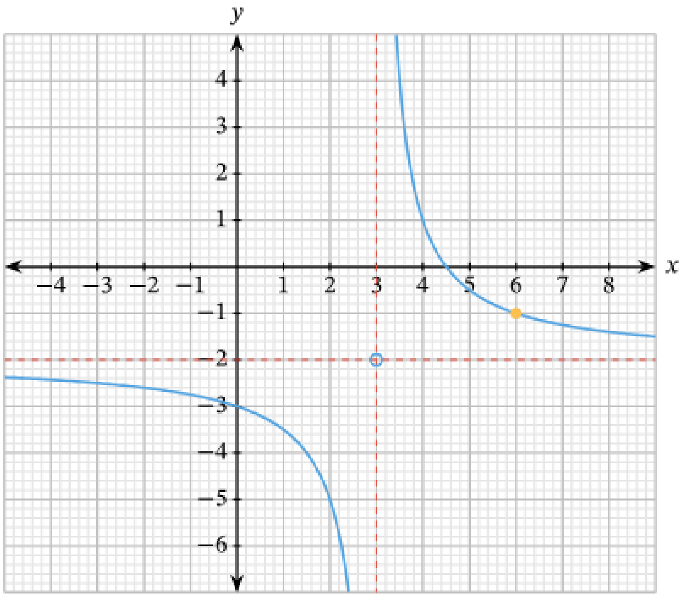
Dans l'exemple précédent, nous avons observé les caractéristiques du graphique de y=$\frac{1}{x}$.Nous pouvons décrire ces caractéristiques par les asymptotes. Rappelons qu'une asymptote est une droite vers laquelle tend une courbe (dans ce cas le graphique de y= $\frac{1}{x}$). Nous avons constaté que les valeurs y des points sur le graphique tendent vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Cela nous indique que la courbe, ou le graphique, tend vers la droite horizontale décrite par l'équation y=0. Nous avons également noté que comme les valeurs x tendent vers zéro, les valeurs correspondant à y sur le graphique tendent vers l'infini positif ou négatif. Cela signifie que le graphique tend vers la droite verticale décrite par l'équation x=0.

Propriétés : La fonction rationnelle $f(x)$= $\frac{1}{x}$ et sa représentation graphique

- Contrairement à la courbe d'un polynôme non constant, la courbe d'une fonction rationnelle peut avoir des asymptotes verticales et horizontales.
- Le graphique de y= est une hyperbole d'asymptote horizontale y=0 et d'asymptote verticale x=0.

b) Représentation graphique de y = $\frac{k}{x-a}$ + b

Le graphique montre y = $\frac{k}{x-a}$ + b.

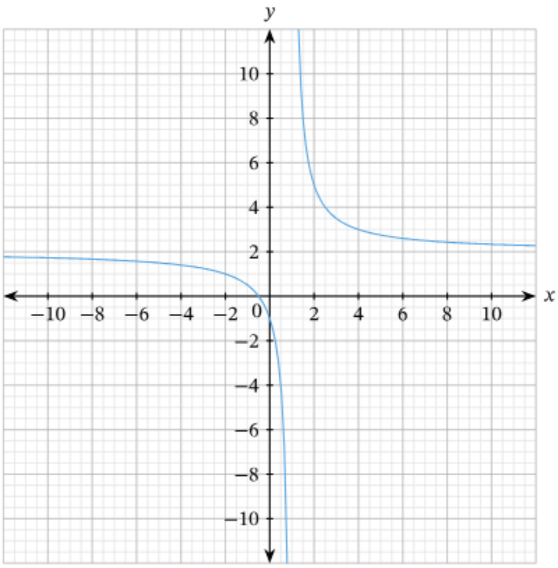


Propriétés : La fonction rationnelle $f(x)$ $\frac{k}{x-a}$ + b et sa représentation graphique

Pour $k{\neq}0$. Le graphique présente une hyperbole avec asymptote verticale $x{=}a$ et asymptote horizontale $y{=}b$

c) Représentation graphique de y = $\frac{mx+n}{px+q}$

Pour le graphique d'une fonction rationnelle sous la forme $f(x){=}\frac{mx+n}{px+q}$ avec $p{\neq}0$,



- L'asymptote verticale de la courbe de cette fonction est à la racine du dénominateur, $px{+}q$, qui est $x =- \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}$, tant que le numérateur ne partage pas la même racine,
- L'asymptote horizontale du graphique de cette fonction est $y{=}\frac{m}{p}$.

4) Fonction irrationnelle

La fonction irrationnelle la plus simple est la fonction racine carrée $f(x)= \sqrt{x}$

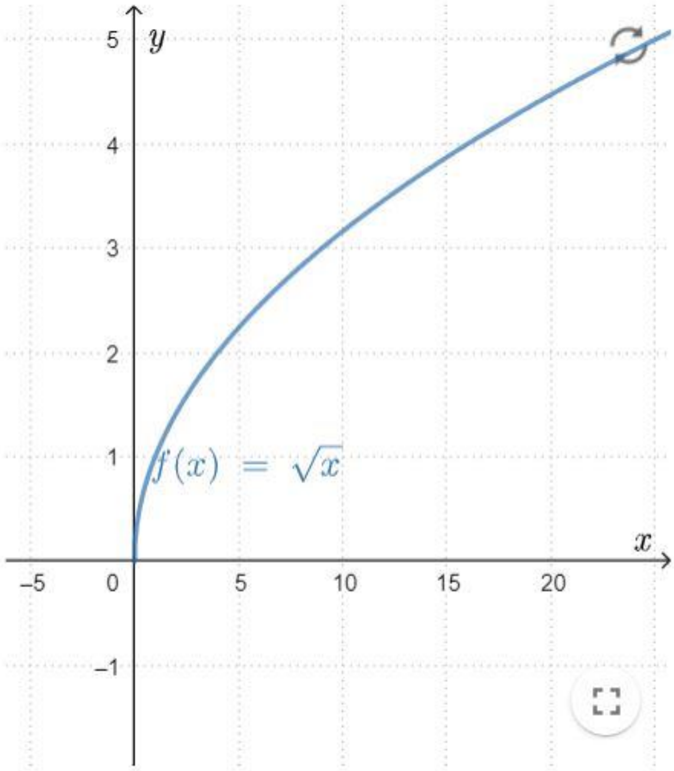
Le tableau des valeurs de cette fonction est (valeurs arrondies à 2 décimales):

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

Le graphe de la fonction est une demie-parabole d'**origine** [0,0].

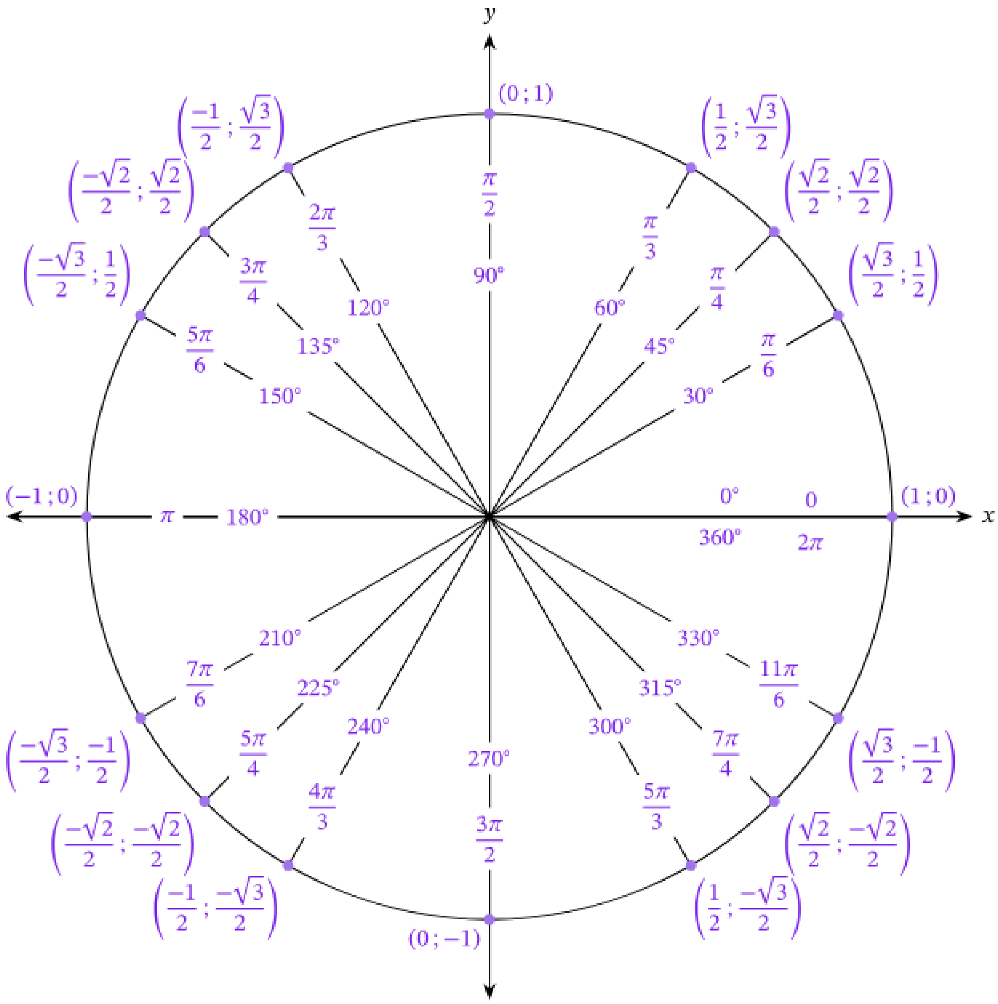
Comme la racine carrée est uniquement définie pour les nombres non négatifs, le domaine de la fonction racine carrée est égal à l'intervalle [0,∞).

Comme la racine carrée d'un nombre non négatif est un nombre non négatif, l'ensemble image est également égal à l'intervalle [0,∞).



5) Fonction trigonométrique

a) Cercle trigonométrique

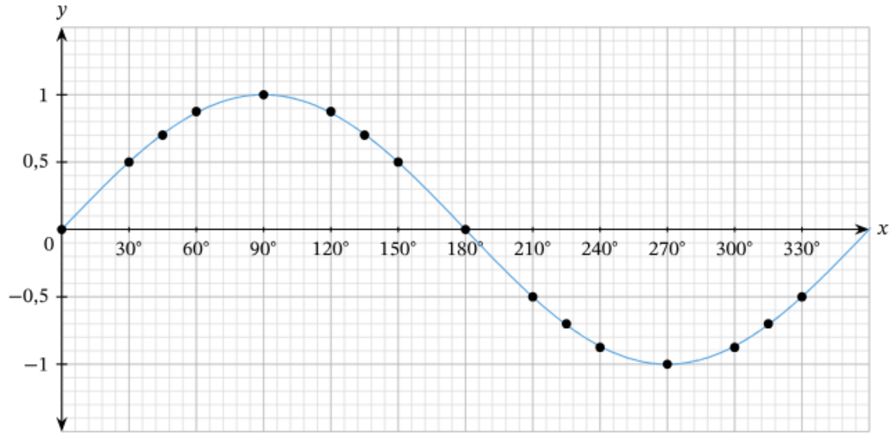


b) Fonction sinus

D'après les angles remarquables sur le cercle trigonométrique. On sait que les coordonnées en y de ces points représentent les valeurs du sinus des angles correspondants. Si on utilise les degrés, on peut établir la table de valeurs remarquables de la fonction sin$x$.

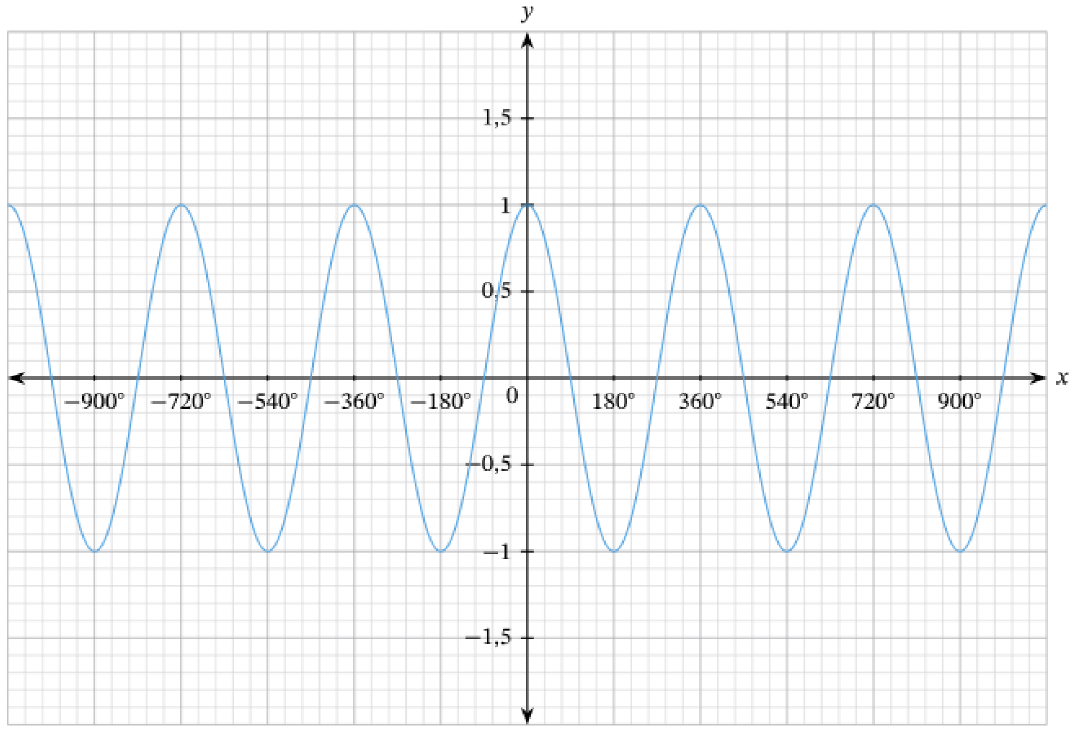
$\boldsymbol{x}$	0∘	30∘	45∘	60∘	90∘	120∘	135∘	150∘	180∘	210∘	⋯
sin$\boldsymbol{x}$	0	12	$\sqrt{22}$		1	√32	√22	12	0	−12	⋯

Une caractéristique clé de la fonction sin$x$, qu'on peut remarquer en observant sa courbe représentative, est qu'elle commence par la valeur 0 lorsque x=0∘, et augmente jusqu'à sa valeur maximale 1 lorsque x=90∘.Lorsqu'on trace les points de la table de valeurs ci-dessus, on obtient la courbe représentative de sin$x$.



Comme indiqué précédemment, la représentation graphique de sin$x$ commence à zéro lorsque x=0°et augmente jusqu'à la valeur maximale 1 lorsque x=90°.

Étant donné que x représente l'angle sur le cercle trigonométrique, on sait que chacune de ces valeurs se répète tous les360° ou 2π radians.Cela mène à la conclusion que la fonction sin$x$ est périodique, avec une période de360° ou 2π radians.Il est possible d'étendre la représentation graphique de sin$x$ au-delà de l'intervalle [0°,360°] en créant des copies de la courbe représentative de cet intervalle. Par exemple, la représentation graphique de sin$x$ sur l'intervalle [−1080°,1080°] est illustré ci-dessous.



Propriétés : La fonction sinus et sa représentation graphique

La représentation graphique de la fonction sinus illustre les caractéristiques suivantes :

L'ordonnée à l'origine y de sin$x$ est égale à 0, et augmente jusqu'à la valeur maximale 1.

Les racines de sin$x$ sont $180n^{\circ}$ ou $n\pi$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

La valeur maximale de la fonction est 1 et sa valeur minimale est -1.

La fonction est périodique, avec une période de 360° ou 2π radians.

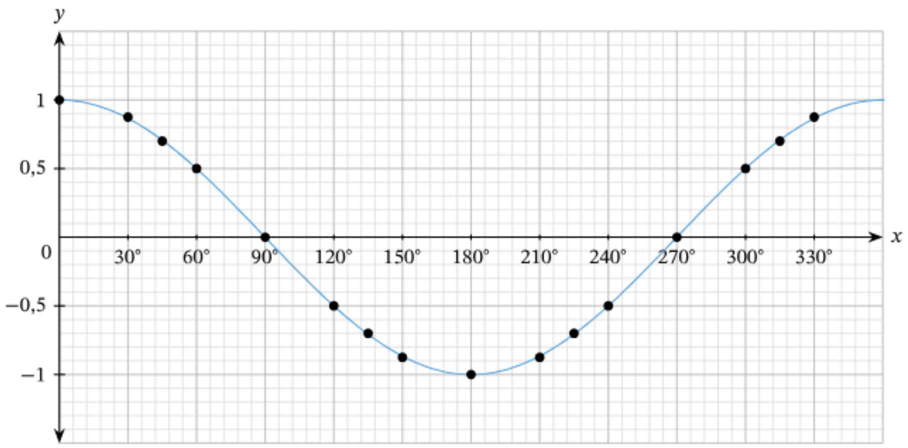
La fonction sin$x$ est impaire ; ce qui implique que $sin(-x)$ = - $sin-x$.

c) Fonction cosinus

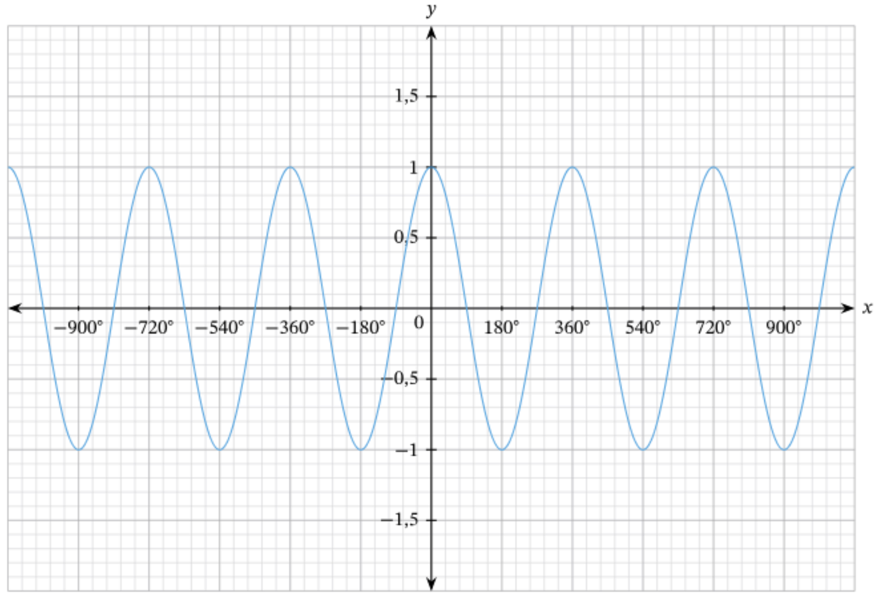
Il est possible de représenter la fonction cosinus graphiquement en utilisant un processus similaire. On sait que les coordonnées en x des points sur le cercle trigonométrique représentent les valeurs du cosinus des angles correspondants. On peut ainsi obtenir la table de valeurs remarquables.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	⋯
$sinx$	1	√32	√22	12	0	−12	−√22	−√32	−1	−√32	⋯

Si on trace ces points, on peut obtenir la représentation graphique de la fonction cosinus



Contrairement à la courbe de la fonction sinus, celle de la fonction cosinus commence à la valeur maximale 1 lorsque x=0° et diminue jusqu'à la valeur minimale -1 lorsque x=180°.Comme le sinus, le cosinus est une fonction périodique avec une période de360° ou 2π radians, et on peut étendre cette courbe à un plus grand intervalle en faisant des copies de la courbe sur l'intervalle [0°,360°].La représentation graphique de cos$x$ sur l'intervalle [−1080°,1080°] est illustré ci-dessous.



Propriétés : La fonction cosinus et sa représentation graphique

La représentation graphique de la fonction cosinus présente les caractéristiques suivantes :

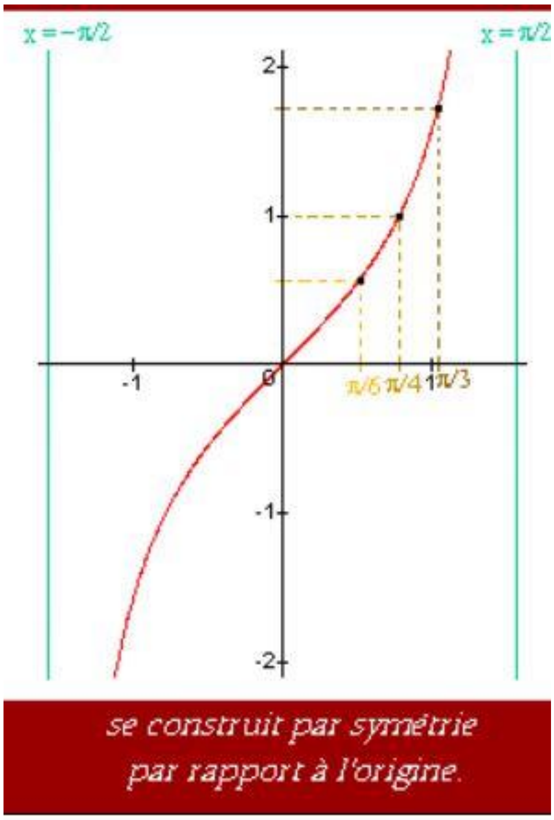
- L’ordonnée à l’origine y de la fonction est 1, et diminue jusqu’à la valeur minimale -1.
- Les racines de $cos x$ sont $(90+180n)°$ ou $\pi 2+n\pi$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- La valeur maximale de la fonction est 1 et la valeur minimale est -1.
- La fonction est périodique, avec une période de360° ou 2π radians.
- La fonction $cos x$ est paire ; ce qui implique que $cos cos(-x) = x$.

d) Fonction tangente

Pour tracer la courbe, il nous faut quelques valeurs connues. Établissons donc un tableau de celles-ci.

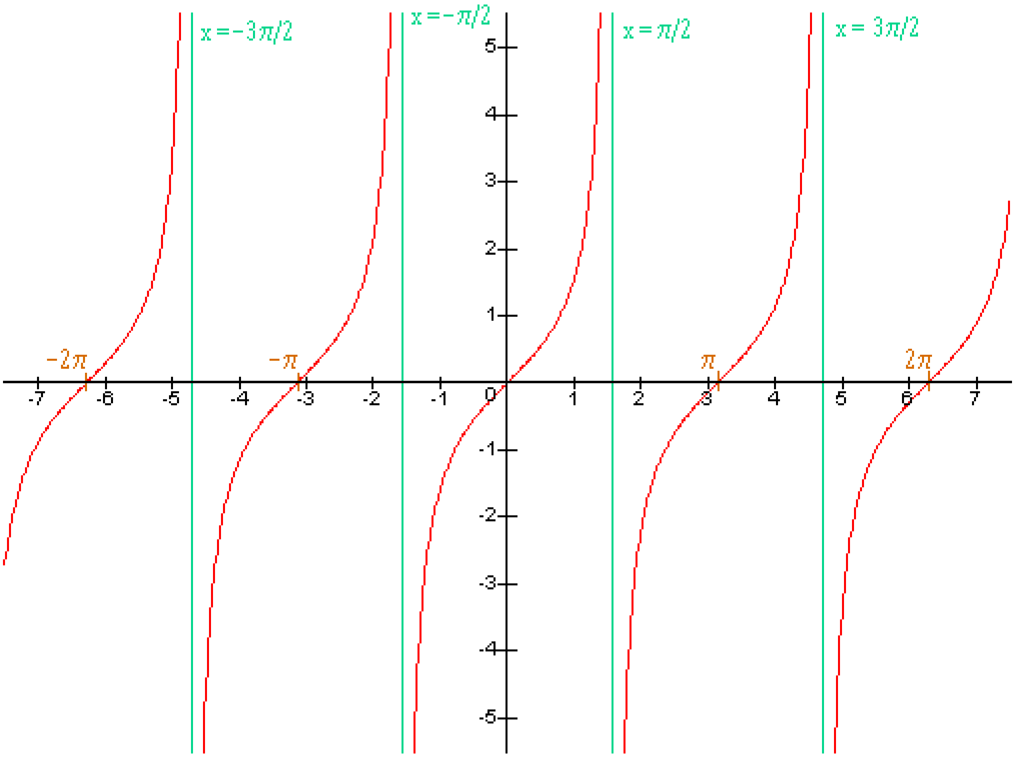
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Les quatre valeurs proviennent du tableau des valeurs remarquables de la tangente. Nous pouvons à présent tracer la courbe représentative de la fonction sur l’intervalle] $-\pi/2$; $\pi/2$[.



Traçons à présent la courbe représentative de la fonction tangente sur l'intervalle [-7 ; 7].

La fonction tangente étant π-périodique, la courbe sur l'intervalle [-7 ; 7] se déduit de celle sur] -π/2 ; π/2[par des translations de longueur π. On obtient alors :



Les droites d'équation x = -3π/2, x = -π/2, x = π/2 et x = 3π/2 sont ce que l'on appelle des asymptotes de la courbe représentative de la fonction tangente. Et ce ne sont pas les seules !