SUITES NUMERIQUES : Généralité

Table des matières

Chapitre I : généralités sur les suites numériques

I. Introduction de la notion de suite numérique

Avec le réchauffement de la planète, les barrières de corail ont tendance à diminuer. De ce fait tous les animaux vivants dans cet écosystème voient leur population réduite. Des études ont montré que cette diminution pouvait atteindre 2% par an selon les différents sites. Grâce aux suites, on peut définir une population de départ p0 et estimer cette population pn pour les années à venir. Ainsi on peut anticiper les conséquences du réchauffement et trouver des solutions pour préserver les poissons tropicaux !

Source : https://www.educastream.com/fr/suites-introduction-1ere-s

II. Définition d'une suite

On appelle suite numérique réelle, une liste ordonnée de nombres réels.

On peut par exemple parler de la suite des nombres positifs, de la suite des nombres pairs…

Chaque élément de la suite est précisément repéré par sa position dans la liste, position pouvant être définie simplement par entier naturel qui désigne son rang.

Définition :

Une suite numérique $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés.

À un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

(u_n): $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \rightarrow u_n$

u_n est appelé terme général de la suite (u_n)

Notations :

- n est l'indice.
- u_0 est le premier terme de la suite .
- u_n est le terme général de la suite. On dit aussi terme de rang n ou $n^{\text{ième}}$ terme de la suite.

Exemple :

Dans la suite formée par tous les nombres entiers multiples de 2 rangés dans l'ordre croissant. 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

$u_0 = 0, u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 6$; $u_4 = 8$; $u_5 = 10$

En effet : $u_0 = 2 \text{ x } 0 = 0, u_1 = 2 \text{ x } 1 = 2, u_2 = 2 \text{ x } 2 = 4$ ...

Et on note $u_n = 2n$ (on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2)

Notation :

Si u est une suite réelle, on note u_n l'image de n par u au lieu de $u(n)$ comme dans une fonction.

$u_0 = u(0)$ est l'image de 0 par la suite u.

La suite u est notée (u_n)

Remarque 1 :

Parfois la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang, par exemple à partir de 1. Le premier terme de la suite est donc u_1

Exemples :

$u_n = \frac{1}{n}$ n'existe pas pour $n = 0$. La suite commence au rang 1. On écrira alors : (u_n) avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ n'existe ni pour $n = 0$, ni pour $n = 1$. La suite commence au rang 2.

On note : la suite $u_n = \frac{1}{n}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N} - \{ 0 ; 1\}$.

Remarque 2 :

Ne pas confondre la notation de la suite (u_n) qui est une fonction avec son terme général u_n qui est un nombre réel. En effet, u_n est la valeur numérique du terme de rang n (ou valeur du $n_{ième}$ terme).

III. Modes de génération d'une suite numerique.

Il existe principalement 2 modes pour générer une suite :

1. Suite définie de manière explicite

Par la donnée de l'expression de u_n directement en fonction de n soit $\mathbf{u_n = f(n)}$

Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice, indépendamment des termes précédents, et on sait calculer n'importe quel terme de la suite. (Comme une fonction).

Définition : Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n : $\forall$ n $\in$N, $u_n = f(n)$

Lorsqu'une suite est générée par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Exemple : $u_n = n^2 + 3n$

Alors : $u_0 = 0$, $u_1 = 1^2+3\times1 = 4$, $u_2 = 2^2+3\times2 = 10$,

$u_{n+1} = (n+1)^2+3(n+1) = n^2+4n+1+3n+3= = n^2+7n+4$

2. Suite définie par une relation de récurrence

Par la donnée d'un terme initial et d'une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent. Une telle suite est dite suite de récurrence et la relation est appelée relation de récurrence.

Dans ce cas, il n'est pas possible de calculer un terme sans connaître le précédent. Cependant, il est possible d'écrire un algorithme à partir d'une calculatrice programmable.

Lorsqu' une suite est générée par une relation de récurrence, chaque terme de la suite est obtenu à partir d'un ou de plusieurs termes précédents.

Remarque : le mot récurrence vient du mot latin recurrere qui signifie « revenir en arrière ».

Exemple :

$u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2n+3$

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2x5+3 = 13$; $u_2 = 2u_1 + 3 = 2x13 + 3 = 29$; $u_3 = 2u_3 + 3 = 2x29 + 3 = 61$

IV. Algorithme : Calcul du k-ième terme d'une suite

Exemple :

On donne la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

- Calculer u_1; u_2; u_3; u_4
- Proposer un algorithme donnant un connaissant n

$u_1=3u_0-2=3\times2-2=4$

Variables : I entier et U réel
Entrées et initialisation
 2→U
Traitement
 pour I variant de 1 à 4 **faire**
  3U−2→U
 fin
Sorties : Afficher U

$u_2=3u_1-2=3\times4-2=10$

$u_3=3u_2-2=3\times10-2=28$

$u_4=3u_3-2=3\times28-2=82$

Exemple :

On donne la suite (v_n) définie par :

$v_0 = 2$, $v_1= 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

- Déterminer v_2, v_3, v_4, v_5.
- Proposer un algorithme donnant un connaissant n.

$v_2=v_1+v_0=1+2=3$

$v_3=v_2+v_1=3+1=4$

$v4=v3+v2=4+3=7$

$v5=v4+v3=7+4=11$

(On a besoin d'une 3[ème] variable w dans le programme pour pouvoir passer à l'ordre supérieur.)

```
Variables : I entier et U, V, W réels
Entrées et initialisation
    2→U
    1→V
Traitement
    pour I variant de 2 à 5 faire
        V+U→W
        V→U
        W→V
    fin
Sorties : Afficher V
```

V. Sens de variation et représentation graphique d'une suite

-Lorsque chaque terme d'une suite est strictement **inférieur** au terme qui le suit, on dit que la suite est **croissante.**

-Lorsque chaque terme d'une suite est strictement **supérieur** au terme qui le suit, on dit que la suite est **croissante.**

1. Sens de variation d'une suite

Exemple :

-Étudier la variation de la suite (u_n) définie pour tout entier n par $\mathbf{u_n = 5n + 1}$.

Pour tout naturel n,

$u_{n+1} - u_n = 5n + 6 - (5n + 1) = 5$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple :

-Étudier la variation de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\mathbf{v_n = -n^2 + 4}$

Pour tout naturel n, $v_{n+1} - v_n = -(n + 1)^2 + 4 - (-n^2 + 4)$

$$= -(n^2 + 2n + 1) + 4 - (-n^2 + 4)$$

$= -n^2 - 2n -1+4+n^2-4$

$= -2n - 1 = - 2n-1)$

Or pour tout entier n, $- (2n-1) < 0$

Donc pour tout naturel n, $v_{n+1} - v_n < 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} < v_n$.

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

Définitions : Soit une suite numérique (u_n).

-La suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geq u_n$

-La suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout n, on a $u_{n+1} \leq u_n$

-Pour une suite constante, on a $u_{n+1} = u_n$

Attention : une suite peut être ni croissante, ni décroissante ...

Par exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 27$

$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - 10(n + 1) + 27 - (n^2 - 10n + 27)$

$= n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 27 - n^2 + 10n - 27 = 2n - 9$

Or, $2n - 9$ est tantôt positif, tantôt négatif, selon les valeurs de l'entier naturel n. $u_{n+1} - u_n$ n'a pas un signe constant : la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

2. Représentation graphique d'une suite numerique

Exemple : Pour tout entier n, on donne : $\mathbf{u_n} = \frac{\mathbf{n^2}}{\mathbf{2}} - 3$.

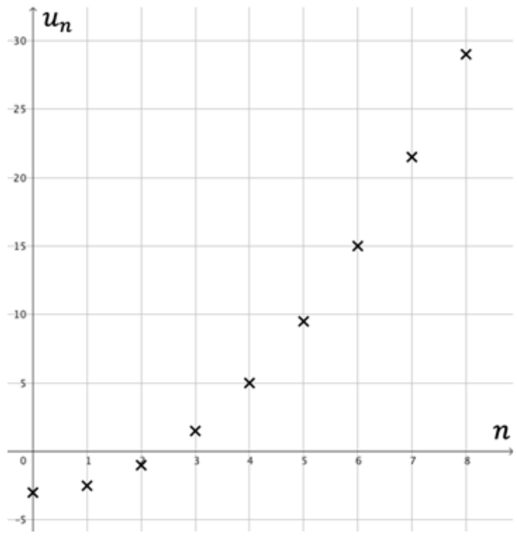
Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n).

Réponse :

On construit un tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite

Dans un repère du plan, on représente la suite (u_n) par un nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29



Exemple : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\mathbf{u_n = \frac{6}{n+2}}$

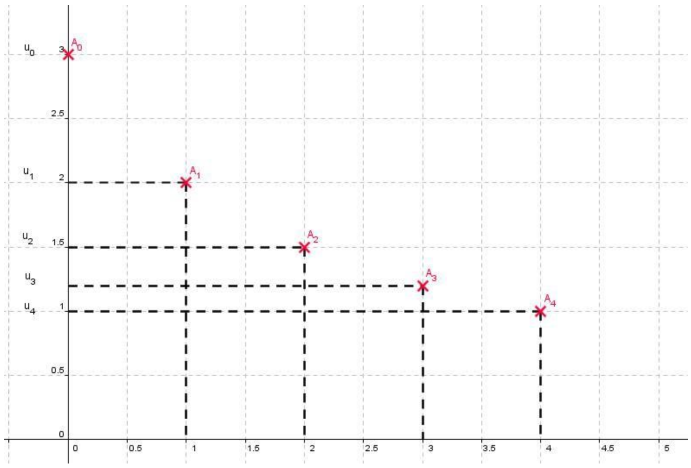
$u_0 = 3$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{6}{5}$; $u_4 = 1$

- Tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4
u_n	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

- Représentation graphique dans un repère du plan :

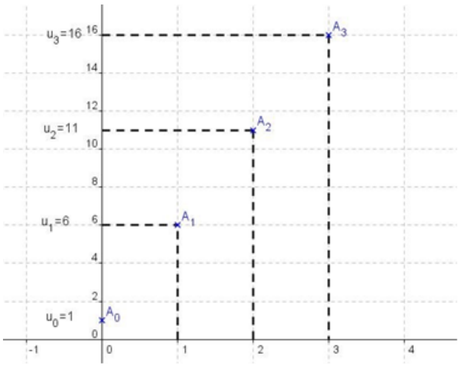
On observe un nuage de points formés par les premiers points de la représentation graphique de cette suite : A0(0;3), A1(1;2), A2(2;$\frac{3}{2}$) (3 ; $\frac{6}{5}$), (4,1)

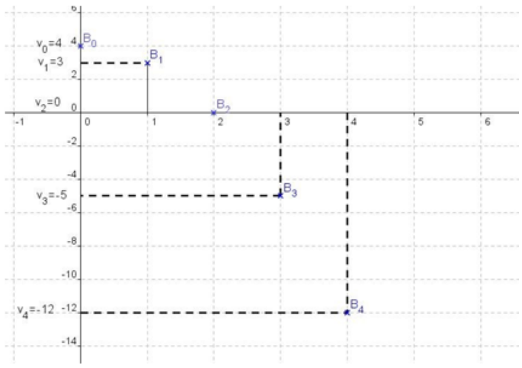


La représentation graphique, dans un repère du plan, des termes d'une suite (un) est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0 ; u_0)$, $(1 ; u_1)$, $(2 ; u_2)$, ..., $(n; u_n)$, ...

Représenter graphiquement les suites (u_n) et (v_n) de l'exemple 6 et 7 précédents :

$u_n = 5n + 1$ et $v_n = -n^2 + 4$





Représentation graphique de la suite

$u_n = 5n + 1$ suite croissante

$u_1 < u_2$; … ; $u_4 < u_5$…

La fonction est croissante

Représentation graphique de la suite

$v_n = -n^2 + 4$ suite décroissante

$u_1 > u_2$; … ; $u_4 > u_5$…

La fonction est décroissante

VI. Convergence d'une suite

Les suites étant des fonctions de N vers R , toutes les propriétés des limites des fonctions s'appliquent aux suites numériques. Cependant, la seule limite qui s'applique aux suites est celle qui concerne les " grandes valeurs " de $n \in N$, c'est à dire: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Une suite peut être convergente ou divergente :

1. Suite convergente : Limite finie

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$ où $a \in R$. Ceci signifie que tout intervalle ouvert contenant le réel a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que **(U_n)** **converge vers a.**

Exemple : La suite de terme général $U_n = \dfrac{n+1}{n}$ converge vers 1 car:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ **Propriété : Lorsque (U_n) converge vers a, alors cette limite est unique.**

2. Suite divergente

2.1 La suite admet une limite infinie

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$. Ceci signifie que tout intervalle du type] A ; + ∞ [contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$. Ceci signifie que tout intervalle du type] – ∞ ; A [contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 10 : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$ **Exemple 11** : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

2.2 La suite n'admet pas de limite

La suite (U_n) n'a pas de limite, ni finie ni infinie.

Exemple : $U_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et (–1) suivant les valeurs paires ou impaires de n.