Mathématiques 1S

Arithmétique

Système de numération

Arithmétique 1S

Durée : 2 semaines de 3heures et 2heures

Objectif général : L'apprenant doit être capable de s'initier à l'arithmétique

Objectifs d'apprentissages	**Contenus**	**Observations**
□ Reconnaitre l'existence des systèmes de numération à base quelconque. □ Convertir un nombre d'une base de numération à une autre. □ Reconnaitre si un nombre donné est premier ou non. □ Déterminer : le PPCM de deux ou de plusieurs nombres, le PGCD de deux nombres par l'Algorithme d'Euclide.	□ Notion sur le système de numérations : - décimale ; - binaire ; - à base quelconque ; - Nombre premier - Divisibilité et décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers. - PGCD - PPCM	DEFINITION : Un nombre est premier s'il a exactement deux diviseurs. On admettra que : PGCD(a,b) =1 si, et seulement si les deux nombres a et b sont premiers entre eux. On utilise l'algorithme par le biais d'un organigramme pour: - montrer qu'un nombre est premier. - rechercher le PGCD (algorithme

EVALUATIONS

- Ecrire un nombre dans une base quelconque ;
- Reconnaitre qu'un nombre est premier ou non ;
- Déterminer le PGCD de deux ou plusieurs nombres par l'algorithme d'Euclide ;
- Calculer le PPCM de deux ou plusieurs nombres.

Chapitre I : LES SYSTEMES DE NUMERATION

Une petite légende autour du mot "**calcul**" (qui vient de « **calculus** », en latin, **caillou**), nous raconte que le berger déposait dans un panier autant de cailloux que de moutons quittaient la bergerie. En rentrant des prés, le berger sortait les cailloux du panier afin de vérifier le compte de moutons.

Compter par paquets : la base du système

Avec 10 petits paquets de 10, nous formons un gros paquet de 100.

Nous réinventons le système de **numération de base 10 (système décimal).**

Pourquoi « de base 10 », car pour obtenir un petit paquet, il faut 10 unités et pour obtenir un gros paquet, il faut 10 petits paquets.

Pour passer au rang des dizaines (petits paquets), il faut 10 unités et pour passer au rang des centaines (gros paquets), il faut 10 dizaines.

10 unités d'un rang valent 1 unité du rang immédiatement supérieur.

I. Définition d’un système de numération

Définition : Un système de numération est un ensemble de symboles qui sont les chiffres assemblés en suivant des règles d’écriture précises pour représenter les nombres.

Selon le système de numération utilisé, un même nombre peut avoir plusieurs écritures possibles.

La numération de base 10 ou écriture décimale demande 10 symboles (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Nos 10 doigts en sont incontestablement à l’origine. Que serait aujourd’hui notre système d’écriture si nous avions deux doigts seulement ???

Il est possible en effet d'écrire les nombres dans d'autres bases que la base décimale ! Prenons par exemple le système binaire (*base 2*) qui ne dispose que de deux symboles : 0 et 1 (deux doigts !)

0 s’écrit 0 (en base 2)

1 s’écrit 1

2 s’écrit 10

3 s’écrit 11

4 s’écrit 100

5 s’écrit 101 etc…

Ce système est par exemple utilisé dans la programmation des ordinateurs. En électronique, soit le circuit est fermé (0), soit il est ouvert (1).

II. Les différents types de système de numération

Dans les systèmes numériques, on utilise principalement les systèmes suivants :

- Le système de numération décimale : Utilise les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Le système de numération binaire : Utilise exclusivement les deux chiffres 0 et 1.
- Le système de numération hexadécimale : Utilise les seize chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

1. Le système décimal (ou à base 10)

Habituellement, on utilise le système décimal. Par exemple, si on a le nombre 2 005, on l'écrit sous cette forme : $1\times10\,000 + 2\times1\,000 + 0\times100 + 0\times10 + 5\times1= 1\times104+2\times103+0\times102+0\times101+5\times100$

On sait que : $a^0 = 1$ si a n'est pas nul

Dans ce système, on utilise 10 chiffres d'où l'appellation décimal.

Ces chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Les groupements se font par 10 : avec 10 unités on forme une dizaine, avec 10 dizaines on forme une centaine...

<u>Exemple :</u> 3 249 $=3\times1\,000+2\times100+4\times10+9\times1$

$=2\times103+3\times102+4\times101+9\times100$

On peut également faire un regroupement par 5.

Les chiffres utilisés sont alors 0 ;1 ;2 ;3 ;4

<u>Exemple :</u> $\overline{1304}5$ (base 5) correspond à $1\times5^3+3\times5^2+0\times5^1+4\times5^0$

$=1\times125+3\times25+0\times5+4\times1$

$=204$ (base 10)

Le nombre qui s'écrit $\overline{1304}$ en base 5 est 204 en base 10

2. Le système binaire

Dans ce système, on utilise 2 chiffres, Ces chiffres sont : 0 et 1. C'est pour cela qu'on l'appelle binaire. La numérotation se fait donc à base 2.

Les appareils électroniques comme les ordinateurs, périphériques réseaux, calculateurs traitent et mémorisent les informations par logiques binaires car leurs entrées et sorties se caractérisent uniquement par deux états : l'état logique bas symbolisé par 0 et l'état logique haut symbolisé par 1.

Après le 1 on utilise $\overline{10}$; $\overline{11}$; $\overline{100}$; $\overline{110}$ ...

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Base 2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{100}$	$\overline{110}$	$\overline{111}$	$\overline{1000}$	$\overline{1001}$	$\overline{1010}$

Remarques :

Les chiffres sont des dessins, des symboles pour représenter les nombres.

Un nombre peut s'écrire avec un ou plusieurs chiffres, il peut s'écrire en lettres…

Exemple :

Les écritures quatre, 4, IV, four sont différentes manières de représenter le même nombre.

1 345 est un nombre de quatre chiffres :

1 est le chiffre des mille : 1 paquet de mille

3 est le chiffre des centaines : 13 centaines

4 est le chiffre des dizaines : 134 dizaines

5 est le chiffre des unités : 1345 unités.

Navigation entre les différentes bases

Passer de la base 2 à la base 10 :

Ecrire le nombre $\overline{11111}$ (base 2) en base 10

Le nombre $\overline{11111}$ (base 2) $=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=16+8+4+2+1 = 31$

Le nombre $\overline{11111}$ (base 2) est 31 en base 10

Passer de la base 10 à la base 2 :

Ecrire le nombre 25 (base 10) en base 2

-On peut utiliser les puissances de 2

Le nombre 25 (base 10) $=16+8+1=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

$= \overline{11001}$ (base 2)

Le nombre 25 (base10) s'écrit $\overline{\mathbf{11001}}$ en base 2

-On peut aussi utiliser les restes des divisions successives par 2

On divise 25 par 2, quotient 12 et reste **1**

On divise 12 par 2, quotient 6 et reste **0**

On divise 6 par 2, quotient 3 et reste **0**

On divise 3 par 2, quotient 1 et reste **1**

On divise 1 par 2, quotient 0 et reste **1**

L'écriture en base 2 est composée des restes successifs de la division par 2 en commençant par le dernier.

Le nombre 25 (base10) s'écrit $\overline{\mathbf{11001}}$ en base 2

3. Cas général

a. Écrire en base 10 un nombre donné en base « B »

-Tableau de numération

-Écrire la composition du nombre dans le tableau de numération.

-Effectuer les calculs en base 10.

Exemple : Ecrire le nombre $\overline{\mathbf{2012}}^{\,3}$ (base trois) en base 10.

3^3=27	3^2=9	3^1=3	3^0=1
2	0	1	2

La décomposition en base 3 s'écrit donc :

$\overline{2012}^3 = 2\times3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 2\times3^0 = 2\times27 + 0 + 3 + 2 = 59$

Réponse : $\overline{\mathbf{2012}}^3 = 59$

b. Ecrire en base « B » un nombre donné en base 10

Méthode 1 : divisions successives par B

-Diviser le nombre a (base 10) par la base « B ».

-Diviser le quotient obtenu par « B ».

Recommencer avec les nouveaux quotients jusqu'à obtenir un quotient inférieur à « B ». L'écriture en base B est composée des restes successifs de la division par B en commençant par le dernier.

Exemple : Ecrire 144 (base 10) en base 5.

$\frac{144}{5}$ = 28 avec un reste **4**. Ce reste 4 constitue le chiffre des unités.

$\frac{28}{5}$ = 5 avec un reste **3**. Ce reste 3 est le chiffre des cinquaines (et non des dizaines car on est en base cinq !)

$\frac{5}{5}$ = 1 avec un reste **0**

$\frac{1}{5}$ = 0 avec un reste **1**

Réponse :144 = $\overline{\mathbf{1034}}^5$

Méthode 2 : Puissances de B

-Créer le tableau de numération de la base « B ».

-Dans le nombre donné en base 10, chercher combien de fois on a la plus grande puissance possible de « B ».

-Recommencer avec les restes successifs et remplir le tableau.

Exemple : Ecrire 144 (base 10) en base 5.

$5^4=625$	$5^3=125$	$5^2=25$	$5^1=5$	$5^0=1$
	1	0	3	4

$144 = \mathbf{1} \times 125 + 19$ soit $144 = \mathbf{1} \times 5^3 + 19$. Donc le plus grand chiffre du nombre en base 5 est **1**

$19 = 0 \text{ x } 5^2 + 3 \times 5 + 4$ donc $19 = \mathbf{3} \times 5^1 + 4$

$4 = \mathbf{4} \times 5^0$

Il reste à remplir le tableau par un zéro quand la puissance de B n'est pas utilisée.

- Réponse :$144 = \overline{\mathbf{1034}}^5$