ALGEBRE : Equation et inéquation

Table des matières

Chapitre III : Equation et Inéquation

I. Equation et inéquation du second degré

Définition

Une « inéquation du second degré à une inconnue » est une inéquation qui peut se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

Ax+bx+c^2>0

Ax+bx+c^2 ≥0

Ax+b+ c^2 < 0

Ax+bx+ c^2 ≤0

Avec a ≠0.

Dans certains cas, on sait résoudre ce genre d'inéquations :

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $4x^2 + 28x + 49 > 0$

On constate que : $4x^2 + 28x + 49 = (2x+7)^2$. Or, pour tout réel x, on a : $(2x+7)^2 \geq 0$ et, plus précisément : $(2x+7)^2 = 0$ uniquement pour $x = -\frac{7}{2}$.

On en déduit l'ensemble des solutions de cette équations : $S =]-\infty ; -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{7}{2} ; +\infty[$

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation : $2x^2 - 9x \leq 0$

L'inéquation est équivalente à : $x(2x - 9) \leq 0$.

On dresse un tableau des signes

x	$-\infty$	0		$\frac{9}{2}$	$+\infty$
x	-	0	+		+
$2x - 9$	-		-	0	+
$x(2x - 9)$	+	0	-	0	+

En tenant compte du fait que l'inégalité de l'inéquation est une inégalité large, il vient alors **: S=[0; $\frac{9}{2}$]**

Les exemples précédents nous permettent de faire deux observations :

Pour résoudre une inéquation du second degré, il convient de savoir déterminer le signe d'un trinôme du second degré ;

La détermination du signe d'un trinôme du second degré est d'autant plus aisée qu'on a pu, si cela est possible, le factoriser.

Ces deux observations conduisent naturellement à la partie suivante.

<u>Signe de l'équation</u>

On considère une équation définie par :

$ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

Ici encore, nous allons utiliser la forme canonique de ax^2+bx+c^2 pour déterminer le signe de cette équation.

On rappelle (mise sous forme canonique) que l'on a :

$Ax^2 + bx + c = a\ [(x + 2ba)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

- $\boxed{1^{er} \text{ cas : } \Delta < 0}$

Dans ce cas, on a : $(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$ et $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

D'où : $(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Finalement le signe du produit : $a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$est celui de a.

- $\boxed{2^{ème} \text{ cas : } \Delta = 0}$

  Dans ce cas, on a : $ax^2 + bx + c = a(x+\frac{b}{2a})^2$

Comme $(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$, on en déduit que le signe de $ax^2 + bx + c$ est ici encore identique à celui de a.

Seule différence par rapport au cas précédent : l'équation s'annule pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- $\boxed{3^{ème} \text{ cas : } \Delta > 0}$

Dans ce cas, on a : $ax^2+bx+c = a(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})\,(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

L'équation a été factorisé et on peut étudier le signe de $f(x)$ en dressant un tableau de signe (voir page suivante).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		-	0	+	|	+	
$x - x_2$		-	|	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	-	0	+	
$ax(\ -x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

<u>Remarque :</u> nous avons placé dans ce tableau les deux racines x_1 et x_2 sans plus de précision. Sans la connaissance du signe de a, on ne peut pas comparer $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Exemple :</u> résoudre l'inéquation : $-2x^2-x+10 > 0$

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -(\ 1)^2 - 4\times\ - \times(\ 2)\ 10 = +180 = 81 = 9^2$.

$-2x^2-x+10$ s'annule donc pour :

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2\,(-2)} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2\,(-2)} = \frac{8}{4} = 2$

- Sur $]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]2;+\infty[$, $-2x^2-x+10$ ne s'annule pas et est du signe de a (-2) : il prend donc des valeurs strictement négatives ;
- Sur $]-\frac{5}{2}\,;\,2\,[$, $-2x^2-x+10$ ne s'annule pas et est du signe de $-a$: il prend donc des valeurs strictement positives ;
- Pour $-\frac{5}{2}$ et 2, $-2x^2-x+10$ s'annule.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x^2-x+10 > 0$ s'écrit :

S= $\{-\frac{5}{2} ; 2\}$

II. Equation et inequation irrationnelle

1. Équations irrationnelles

Définition

Une équation est dite irrationnelle si l'inconnue figure sous au moins un radical.

Exemples

$5\sqrt{x-1}+2=0$ est une équation irrationnelle. Mais x - $2\sqrt{6}$ ne l'est pas.

Résolution

Résoudre (E) : $\sqrt{8-x}$ $-x+2=0$

$\sqrt{8-x}=x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=(x-2)^2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=x^2-4x+4 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4)=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-4=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \\ x \geq 2 \end{cases}$

-1<2 donc **S= $\{4\}$**

2. Inéquations irrationnelles

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{3x-1} \leq \sqrt{x+6}$

Réponse

$\sqrt{3x-1} \leq \sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ 3x-1 \leq x+6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq -6 \\ 3x - 1 \leq x + 6 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathbf{S}= \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; -\mathbf{6}; \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right\}$

III. Equation avec valeur absolue

On étudiera ce type d'équation avec des exemples :

1^er exemple

Résoudre l'équation $|x^2+2x|=0$

On a $|x^2+2x|=0$ si et seulement si $x^2+2x=0$

Or $x^2+2x=0$ si et seulement si $x(x+2)=0$, donc si et seulement si $x = 0$ ou $x = -2$

L'ensemble des solutions est donc S={−2;0}

2^e exemple

Résoudre $x^2+|x|=0$

1ère méthode

On sait que $|x|^2=x^2$, donc l'équation est équivalente à $|x|^2+|x|=0$ ou $|x|(|x|+1)=0$. Ce qui équivaut à $|x|=0$ ou $|x|=-1$

$|x|\geq 0$ quel que soit x , donc l'équation $|x|=-1$ n'admet aucune solution ; Ainsi la seule solution est 0 et S={0}

2ème méthode

Écrivons l'équation sans le symbole de valeur absolue

On sait que si $x\geq 0$ alors $|x|=x$ et si $x\leq 0$ alors $|x|=-x$

On va consigner ces résultats dans un tableau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x
$x^2+\lvert x\rvert$	x^2-x	0	x^2+x

On cherche alors les solutions dans $]-\infty\,;0]$ puis celles dans $]0;+\infty[$

Dans $]-\infty\,;0]$ l'équation est $x^2-x=0$, ce qui équivaut à $x(x-1)=0$ avec $x\leq 0$

Donc $x=0$ ou $x=1$. Or x doit être négatif, donc la solution est $x=$

0 Dans $]0;+\infty[$, l''équation est $x^2+x=0$; avec $x>0$.

$x^2+x=0$ équivaut à $x(x+1)=0$

Ce qui équivaut à $x=$ ou $x=-1$. Or x doit être strictement positif, don il n'existe aucune solution dans $]0\,;+\infty[$

Alors S={0}

3e exemple

Soit à résoudre $|x^2-1|-|x-2|=0$

Écrivons l'équation sans les symboles de valeur absolue

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
x^2-1	+	0	-	0	+	0	+	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0	$-x^2-1$	0	x^2-1	0	x^2-1	
$x-2$	-	0	-	0	-	0	+	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	0	$-x+2$	0	$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x^2-1\rvert-\lvert x-2\rvert$	x^2-x+1	0	$-x^2-x+3$	0	x^2-x+1	0	x^2+x-3	

Ainsi :

- sur $]-\infty\,;-1]$, l'équation s'écrit $x^2-x+1=0$
- sur $[-1;\,1]$, l'équation s'écrit $-x^2-x+3=0$
- sur $]1;2]$, l'équation s'écrit $x^2-x+1=0$
- et sur $]2\,;+\infty[$, l'équation s'écrit $x^2+x-3=0$
-

Résolvons l'équation sur chacun de ces intervalles :

- Sur $]-\infty\,;-1]$, l'équation est $x^2-x+1=0$

$\Delta=(-1)^2-4.1=-3<0$, donc on n'a aucune solution dans cet intervalle

- Sur $[-1;\,1]$, l'équation est $-x^2-x+3=0$ $\Delta=(-1)^2-4.(-1)(3)=13>0$

On a deux racines distinctes : x'$=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et x''$=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Or ces deux nombres n'appartiennent pas à l'intervalle, donc on n'a aucune solution dans

$[-1;\ 1]$

- Sur $]1\ ;2]$ l'équation est $x^2-x+1=0$ $\Delta=(-1)^2-4.1=-3<0$ on n'a aucune solution dans cet intervalle
- Sur $]2\ ;+\infty[$,l'équation est $x^2+x-3=0$ $\Delta=(1)^2-4.(1)(-3)=13>0$, on a deux racines distinctes : x'= $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et x''= $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

  Or ces deux racines n'appartiennent pas à $]2\ ;+\infty[$, donc on n'a aucune solution dans cet intervalle .

4e exemple

Soit à résoudre $|x^2-x+2|-|x+1|=0$

L'équation équivaut à $|x^2-x+2|=|x+1|$

Comme les deux membres sont positifs, l'équation équivaut à $|x^2-x+2|^2=|x+1|^2$

On a alors $|x^2-x+2|^2-|x+1|^2=0$

$((x^2-x+2)-(x+1))((x^2-x)+2+(x+1))=0$

Ce qui équivaut à $x^2-2\ x+1=0$ou $x^2+3=0$

Le première équation a pour solution x=1, la deuxième n'admet aucune solution, donc

$S=\{1\}$