GEOMETRIE

Géométrie dans l'espace

Table des matières

Partie 1 : Geometrie dans l'espace

Chapitre I : Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire

1. Définitions

On désigne par E l'espace et par $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace de coordonnées (x,y,z). On définit la norme du vecteur $\vec{u}$ par : $||\vec{u}||$ = $\sqrt{\vec{u}^2}$= $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$.

On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et définit par :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}$ [$||\vec{u} + \vec{v}||^2$ - $||\vec{u}||^2$ - $||\vec{v}||^2$]

2. Expressions du produit scalaire

- Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$(x,y,z) et $\vec{v}$(x',y',z') est définit par :

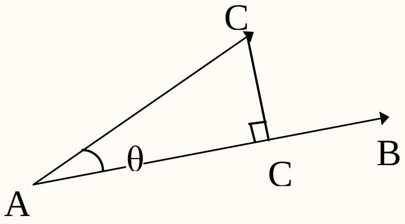
$\vec{u}.\vec{v}$= x x' + y y' + zz'   (Expression analytique)

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, le produit scalaire de u et v est définit par :

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2. ||\vec{v}||^2\cos(\vec{u}, \vec{v})$ avec $(\vec{u}, \vec{v})$ la mesure de l'angle géométrique associé à u et v .

- Si $\overrightarrow{AC'}$ est le projeté de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) alors on a la propriété suivante :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$$



3. Propriétés

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et $\vec{u}.\vec{0}=0$

$\vec{u}\ k\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

$\vec{u}\ .(\vec{v}.\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Attention :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ ne prouve pas du tout que $\vec{v}=\vec{w}$

II. Orthogonalité dans l’espace

4. Vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires, ce qui se traduit avec le produit scalaire par : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l’espace de coordonnées (x , y , z) et (x’, y’, z’) alors :

$\vec{u}.\vec{v}= 0 \Leftrightarrow x x' + y y' + z z' = 0$

ATTENTION :

$\vec{u}.\vec{v}= 0$ signifie que $\vec{u}= 0$ ou que $\vec{v}= 0$ ou que u et v sont **orthogonaux**

5. Droites orthogonales

Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$et $\vec{v}$sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v}= 0$.

6. Vecteur normal à un plan

Un vecteur normal a un plan P est un vecteur $\vec{n}$ non nul dont la direction (qui est une droite) est orthogonale au plan P.

7. Droite orthogonale à un plan

Soient une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

La droite D est orthogonale à P si et seulement si pour tout point A et B de P :

$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$

La droite D est orthogonale à P si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v}= 0$ et $\vec{u}.\vec{w}= 0$.

III. Géométrie analytique

1. Expression analytique du produit scalaire

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$(x, y,z) et $\vec{v}$(x’,y’,z’) est :

$\vec{u}.\vec{v}$ = xx’ + yy’ + zz’.

2. Equation cartésienne d’un plan

Les plans orthogonaux à un vecteur n (a,b,c) ont une équation cartésienne de la forme : ax + by + cz + d = 0 avec d réel.

Pour trouver une équation du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'écrire que :

M∈P si et seulement si $\vec{n}\ \overrightarrow{AM}$ =0.

3. Distance d'un point à un plan

Soient A un point de l'espace et P un plan passant par A et de vecteur normal non nul n. Soient M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan P.

La distance MH est : MH=$\frac{|\overrightarrow{\mathbf{AM}}.\vec{\mathbf{n}}|}{||\vec{\mathbf{n}}||}$

Dans un repère orthonormé, la distance d du point A de coordonnées ($x_{0,}$ $y_{0,}$ $z_{0)}$ au plan P d'équation cartésienne : ax +by + cz + d = 0 est égale à :

$$d(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cette distance correspond à la plus petite des distances séparant M des points de P.

Chapitre II : Barycentre

I. Defintion

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés de masse totale $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ non nulle, alors :

- Il existe un unique point G, appelé **barycentre** du système, tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.
- Pour tout point M, on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MG}$

II. Théorèmes d'associativité et de multiplication par un réel

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple : Soit G le barycentre de (A,1), (B,2), (C,-1) et (D,3) et soit G' le barycentre de (A,1), (B,2) et (C,-1). Par le théorème d'associativité, G est le barycentre de (G',2) et (D,3).

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en multipliant tous les coefficients de ces points par un même réel non nul.

Exemple : Soit G le barycentre de (A,1), (B,2), (C,-1) et (D,3), G est également le barycentre de (A,2), (B,4), (C,-2) et (D,6).

III. Segment, droite, plan et triangle

Le segment [AB] est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A,α), (B,β) avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A,1-t), (B,t) où t est un réel quelconque.
La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres de A et B (avec A et B distincts).

Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe des réels x et y tels que M soit le barycentre de (A,1-x-y), (B,x), (C,y) (avec A, B, C distincts et non alignés). Le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres de A, B et C.

L'intérieur d'un triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C affectés de coefficients strictement positifs.

Chapitre III : Droites de l'espace

I. Représentation paramétrique

1. Droite

Soit A(x_A , y_A , z_A) un point de la droite Δ qui a pour vecteur directeur non nul $\vec{u}$(α,β ,λ).

Un point M(x,y,z) appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\begin{cases} x = x_a + t\alpha \\ y=y_a+t\beta (t \text{ réel}) \\ z = z_a + t\lambda \end{cases}$

Réciproquement, toute représentation paramétrique de cette forme avec

(α,β ,λ)≠ (0, 0, 0) est celle d'une droite.

2. Segment et demi-droite

Soient deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Un point M(x,y,z) appartient au segment [AB] (*ou à la demi-droite [AB)*) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ avec **t appartenant à l'ensemble [0 , 1]** *(ou t appartenant à l'ensemble [0 , + ∞ [ )* .

La représentation paramétrique est la même que pour une droite, seul l'intervalle auquel appartient t change.

II. Système d'équations d'une droite

L'intersection de deux plans non parallèles et non confondus est une droite. On peut donc en déduire l'équation d'une droite à partir d'un système de deux équations de plan.

Si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

est une droite.

III. Intersection d'une droite et d'un plan

Soit la droite D de vecteur directeur non nul $\vec{u}$ (α,β ,λ). Soit un plan P d'équation : ax + by + cz + d = 0 et donc de vecteur normal $\vec{n}$ (a,b,c).

La droite D et le plan P ont un seul point en commun si u et n ne sont pas orthogonaux, c'est à dire si aα + b β + cλ ≠ 0. Si u et n sont orthogonaux, la droite D appartient au plan P ou bien la droite D est parallèle au plan P.

Pour trouver le point d'intersection d'une droite avec un plan, il suffit de déterminer la représentation paramétrique de D et de remplacer les variables x, y et z de l'équation du plan par x(t), y(t) et z(t). On obtient une équation à une seule inconnue et on détermine t. On remplace ensuite t par sa valeur dans x(t), y(t) et z(t). On a ainsi déterminé le point d'intersection.

Chapitre IV : Plans de l'espace

I. Intersection de deux plans

Soient deux plans P_1 et P_2 d'équations : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

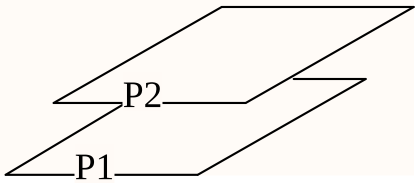
Il y a trois cas possibles dans l'espace :

1. P_1 et P_2 sont confondus

Si P_1 et P_2 sont confondus, les équations de P_1 et P_2 correspondent à une seule et même équation. On peut ne pas le voir au premier coup d'œil mais il suffit de vérifier que les suites de nombres
(a_1,b_1,c_1,d_1) et (a_2,b_2,c_2,d_2) sont proportionnelles.

2. P_1 et P_2 sont disjoints

Si P_1 et P_2 sont disjoints, les plans sont parallèles et non confondus. Il suffit de vérifier que les triplets (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) sont proportionnels, et que d_1 et d_2 ne sont pas proportionnels (ce qui veut dire que les vecteurs normaux sont colinéaires).

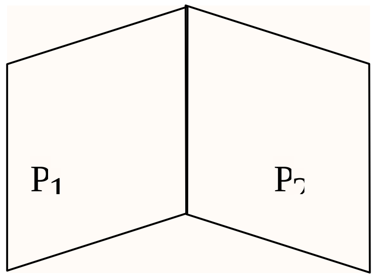


3. P_1 et P_2 sont sécants

Si P_1 et P_2 sont sécants, les plans ont une droite en commun.
Dans ce cas, les triplets (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0 \end{cases}$ est une droite

Pour résoudre un tel système, il faut exprimer x et y en fonction de z par substitution. On remplace ensuite z par t .

Le point M appartenant à la droite D a pour coordonnées (x(t), y(t), z = t). On obtient ainsi une définition paramétrique de la droite.



II. Intersection de trois plans

Soient trois plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations :

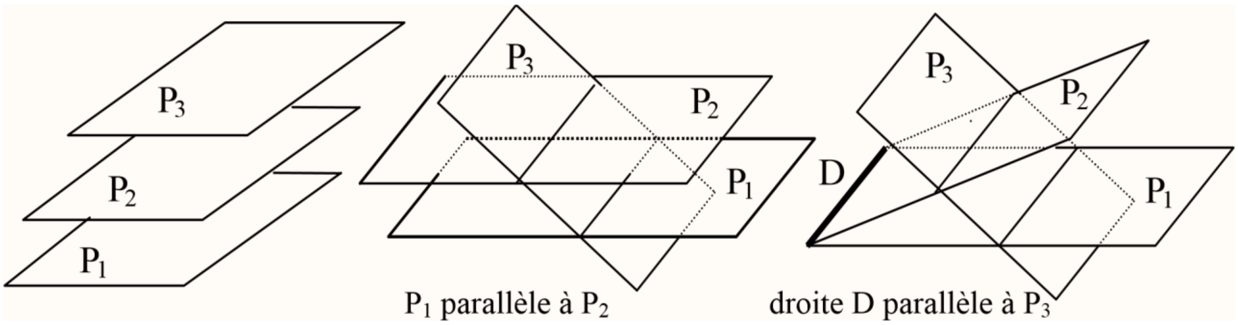
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.

Il y a quatre cas possibles dans l'espace :

1. Tous les points en commun

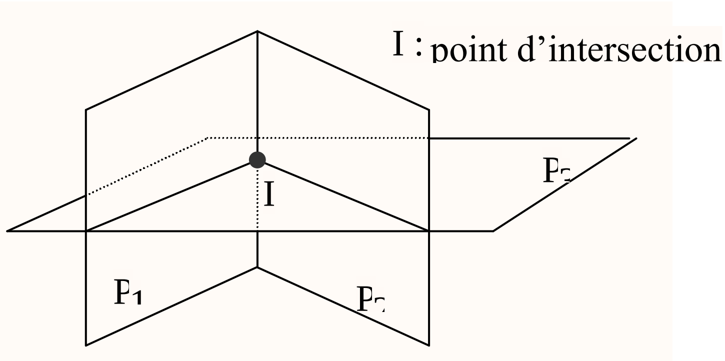
Les plans sont confondus : $P_1 = P_2 = P_3$.

2. Aucun point commun aux trois plans

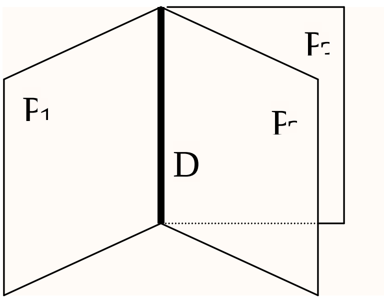


P1 parallèle à P2 droite D parallèle à P3

3. Un seul point commun aux trois plans



4. Une droite commune



D est l’intersection des trois plans.