ARITHMETIQUE ET MATRICE :

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Table des matières

Première partie: Arithmétique

Chapitre II : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

I. Rappel

1.Les ensembles $\mathbb{N}$ $\boldsymbol{et}$ $\mathbb{Z}$

L'ensemble des entiers {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...} est appelé ensemble des entiers naturels et noté $\mathbb{N}$.

L'ensemble des entiers {... ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...} est appelé ensemble des entiers relatifs, il est noté $\mathbb{Z}$

Remarques :

$\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$

La somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels.

La somme et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.

2.Technique de la division d'entiers naturels

Poser la division de 43 par 5.

On peut écrire 43 = 8 × 5 + 3.

43 s'appelle **le dividende,** 5 **le diviseur**, 8 **le quotient** et 3 **le reste**.

Remarques :

On a 3 < 5, le reste doit toujours être strictement inférieur au diviseur.

Les multiples de 5 sont 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 et on choisit 40 = 8 × 5 car 45 > 43.

Pour chercher le quotient d'une division, on cherche en pratique les multiples du diviseur et on choisit celui qui précède immédiatement le multiple supérieur au dividende.

1. Propriété (transitivité)

Soit a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise b et b divise c alors a divise c.

Exemple :

3 divise 12 et 12 divise 36 donc 3 divise 36.

On peut appliquer également la contraposée de la propriété de transitivité : Comme 2 ne divise pas 1001, aucun nombre pair ne divise 1001. En effet, si par exemple 10 divisait 1001 alors 2 diviserait 1001.

2. Propriété (combinaisons linéaires) :

Soit a, b et c trois entiers relatifs.

Si c divise a et b alors c divise ma + nb où m et n sont deux entiers relatifs

Exemple :

Soit un entier relatif *N* qui divise les entiers relatifs *n* et *n* + 1. Alors *N* divise *n* + 1 - *n* = 1 **Donc *N* = -1 ou *N* = 1.**

II. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

1. Définition :

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.

Il existe un unique couple (q ; r) d'entiers naturels tel que : a = bq + r et r < b.

Le nombre a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

On dit que **le couple unique (q ; r) est le résultat de la division euclidienne de a par b**.

Remarque : Si r = 0, alors a est divisible par b.

Exemples :

a) Division euclidienne de 31 par 7 : 31 = 7 × 4 + 3.

b) Le reste de la division de a par 2 ne peut être que 0 ou 1.

Donc tout entier a peut s'écrire 2q ou 2q + 1, avec q $\in\mathbb{Z}$