FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 6 : Suites numeriques

Chapitre I : Généralites

I. Suite de nombres

Intuitivement, une suite de nombres réels est une liste ordonnée de nombres. Cela signifie que, parmi ces nombres il y a un premier terme, puis un deuxième, un troisième etc...

Généralement, on note u_0 le premier terme de la suite, puis u_1 le deuxième, u_2 le troisième... **Le $n^{ième}$ terme est donc u_{n-1} .**
Si le premier terme est u_1, le $n^{ième}$ terme sera donc u_n .

Une suite est notée conventionnellement **(u_n)**. Construire une suite **(u_n)**, c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté u_n . Ce nombre est appelé **terme d'indice n de la suite (u_n) ou se lit « u indice n »**.

II. Modes de définition d'une suite

1. Suites définies explicitement

Une suite est définie explicitement si pour un n donné, on peut donner clairement la valeur de u_n.

Exemples :

- La suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = x^2 +3$.
- La suite (v_n) définie par : $v_n = (-1)^n$
- La suite (I_n) définie par : $I_n = \int_a^b f(t)dt_n$ avec f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n$.

Ces suites définies à l'aide d'intégrales ne sont pas explicitement au programme mais un bon nombre d'exercices donnés au baccalauréat y font référence.

2. Suites définies par récurrence

Une suite est dite définie par récurrence lorsque chaque terme est calculé en fonction du ou des précédents. Il faut alors définir le ou les premiers termes et une formule permettant de calculer un terme en fonction des précédents. **Exemples :**

$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2U_{n-3} \end{cases}$; $\begin{cases} u_0 = 3 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = U_n + 2u_{n+1} \end{cases}$

III. Suites arithmétiques et géométriques

Parmi l'infinité des suites que l'on peut construire, nous nous intéressons particulièrement aux suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = r \times n + u_0$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre u_n et u_p (n et p entiers)	$u_n = u_p + (n - p)\, r$	$u_n = u_p \times q^{n\,p-}$
Somme de N termes consécutifs	N x $\frac{\text{1er terme +dernier terme}}{2}$	1er terme x $\frac{(1-q^n}{1-q}$

IV. Sens de variation

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. Suites monotones

(u_n) est **monotone** si elle est **croissante** ou si elle est **décroissante** .

Si pour tout entier naturel n, on a :

$U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors U_n est croissante.

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors U_n est décroissante.

$U_{n+1} = U_n$ alors U_n est constante ou stationnaire.

2. Suites strictement monotones

(u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou décroissante.

Si pour tout entier naturel n, on a :

$U_{n+1} - U_n > 0$ alors U_n est strictement croissante.

$U_{n+1} - U_n < 0$ alors U_n est strictement décroissante.

3. Suites périodiques, majorées, minorées et bornées

S'il existe des réels M, m et p $(p > 0)$ tels que pour tout entier n :

$U_{n+p} = U_n$ alors (u_n) est périodique de période p

$u_n \leq M$ alors (u_n) est majorée (M est un majorant).

$u_n \geq m$ alors (u_n) est minorée (M est un minorant).

$m \leq u_n \leq M$ alors (u_n) est bornée (majorée et minorée).

Chapitre II : Raisonnement par recurrence

I. Principe

Le raisonnement par récurrence est un procédé utile pour démontrer qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.

Le procédé se décompose en trois étapes :

1- **Vérifier** que la propriété P est vraie pour l'entier n_0 .

2- **Supposer** que P est vraie pour un entier n tel que $n \geq n_0$ et démontrer alors que la propriété P est vraie pour l'entier $n_0 + 1$.

3- **Conclure** que P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à un entier naturel n_0 .

II. Exemple

Montrer que la propriété P(n): $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n \geq 1$

1- Etudions si P(1) est vraie : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc **P(1) est vraie**.

2- Supposons que P(n) soit vraie pour **un entier n**, $n \geq 1$.

On démontre que pour l'entier **suivant n + 1**, la propriété est encore vraie

$$1+2+\ldots\ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1)}{2}$$

3- Conclusion : la propriété P(n) est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Chapitre III : Limites et convergence

I. Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels et a un nombre réel.

- On dit que **(** u_n **) converge vers la limite réelle a** si tout intervalle ouvert de centre a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$

- La suite **(** u_n **) a pour limite** $+\infty$ **(**ou - ∞) si tout intervalle ouvert du type] a ; $+\infty$ [(ou] $-\infty$ **;** a [ ) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \; ou \; \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- La suite **diverge** si elle ne converge pas. Dans ce cas, elle peut soit avoir une limite infinie ($+\infty$ ou - ∞), soit ne pas avoir de limite.

Par exemple, la suite $(-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$, donc elle diverge.

II. Opérations et théorèmes de comparaison

1. Opérations sur les limites

Les théorèmes sur la limite d'une somme ($u_n + v_n$), d'un produit ($u_n \times v_n$) et d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ de suites sont les mêmes que les théorèmes sur les limites de fonctions.

2. Théorèmes de comparaison

Soient (u_n), (v_n), (x_n) et (y_n) quatre suites de nombres réels.

Si à partir d'un certain rang …	Et si …	Alors …
$u_n \leq x_n$	(u_n) tend vers $+\infty$	(x_n) tend vers $+\infty$
$x_n \leq u_n$	(u_n) tend vers $-\infty$	(x_n) tend vers $-\infty$
$\lvert x_n - \ell \rvert \leq u_n$	(u_n) tend vers 0	(x_n) tend vers ℓ
$u_n \leq x_n \leq v_n$	(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ	(x_n) converge vers ℓ (Théorème des gendarmes)
$x_n \leq y_n$	(x_n) et (y_n) sont convergentes	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{\to+\infty} y$

3. Suites arithmétiques et géométriques

a) Suites arithmétiques

Soit la suite arithmétique (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

b) Suites géométriques

Soit q un nombre réel. Soit une suite géométrique (u_n) définie par : $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors (u_n) a pour limite 1
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

- Si q ≤ - 1 alors (q^n) est divergente et n'a pas de limite.

4. Suites monotones

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

5. Suites de type $u_n = f(n)$

Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\ ;+\infty[$, a réel.

Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet la même limite.

Exemple : $u_n = \frac{ln\,(n)}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Pour tout entier n non nul, on a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \frac{ln\,(x)}{x}$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$

Toutes les formules de limites pour des fonctions vues dans les chapitres précédents sont ainsi valables pour les suites.

Exemples :

$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$, a nombre réel tel que a > 1.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$, α nombre réel tel que α> 0.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$, a > 1 et α> 0 .

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{\alpha}}{\ln n} = +\infty \quad \alpha > 0$

6. Suites de type $u_n = f(v_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite de points de I.

Si la suite (u_n) admet une limite a (finie ou infinie) et si la fonction f admet en a une limite ℓ (finie ou infinie) alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ admet ℓ pour limite.

$$\boxed{\text{Si } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \text{ et si } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n)) = \ell}$$

Exemple : Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{\frac{5n+3}{2n-9}}$. v_n est définie pour $n \geq 5$.

Posons : $u_n = \frac{5n+3}{2n-9}$, $n \geq 5$; On a donc v_n

l'image (v_n) de la suite (u_n) par la fonction $x \to \sqrt{x}$ converge vers $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

7. Suites définies par récurrence $u_n+1 = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f). Soit a un nombre réel de I. On construit ainsi une suite (u_n) de points de I que l'on note de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a, \ a \in I \quad \text{(condition initiale)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier n } \textit{(relation de récurrence)} \end{cases}$$

Théorème :

Soit (u_n) une suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$.

Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers $l \in I$, alors l est un point fixe de f (c'est-à-dire $f(l)=l$).

Ce théorème nous dit que si (u_n) converge, alors nécessairement elle converge vers un point fixe de *f*. Pour trouver la limite d'une telle suite, on cherchera donc les points fixes de *f*.

Proposition :

Si f est croissante de I sur I, alors (u_n) est monotone.

Exemple : $\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ n entier naturel

Tracer la courbe représentative de f

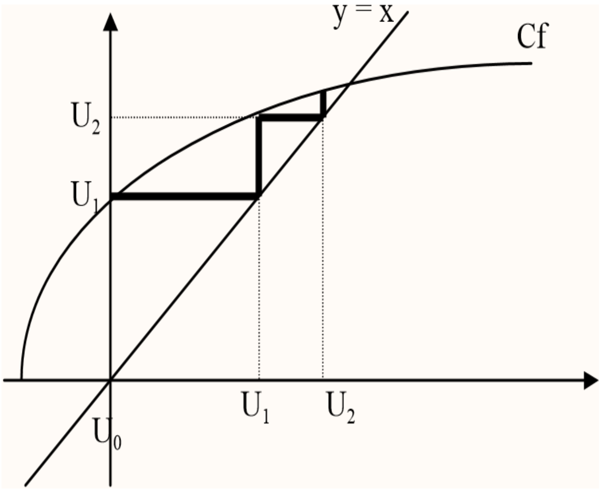
Soit la fonction f : $x \to \sqrt{1+x}$.

f est définie sur $[\,0;+\infty\,[$(on a bien : f ($[\,0;+\infty\,[$) $\subset [\,0;+\infty\,[$).

On trace C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Placer les points u_n

Si u_n est porté sur l'axe des abscisses, la courbe C_f permet d'obtenir la valeur $f(u_n)$, c'est à dire u_{n+1} sur l'axe des ordonnées. Pour poursuivre le processus, il faut « reporter » u_{n+1} sur l'axe des abscisses, pour cela on utilise la droite d'équation $y = x$.



Interprétation graphique

On observe sur la figure que les points u_1, u_2, u_3, u_4, ... se rapprochent du point d'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$. On conjecture que la limite de cette suite est le point d'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$.

Pour tout réel $x \geq -1$, $\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow (1 + x = x^2$ et $x \geq 0) \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

L'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$ est le point

$(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

On conjecture donc que la limite de (u_n) est … Ce qui pourra être prouvé par la suite.

8. Suites Adjacentes

a) Définition

Deux suites **(u_n) et (v_n) sont adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim (v_n - u_n) = 0$.

b) Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite L. De plus, pour tout n : $u_n \leq L \leq v_n$.