FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 5 : Théorèmes sur les fonctions

Ces théorèmes ne concernent que les fonctions continues sur un intervalle.

Soit (a,b)∈R2 tels que a<b.

Pour les fonctions continues sur un segment.

Chapitre I : Théorème des valeurs intermédiaires

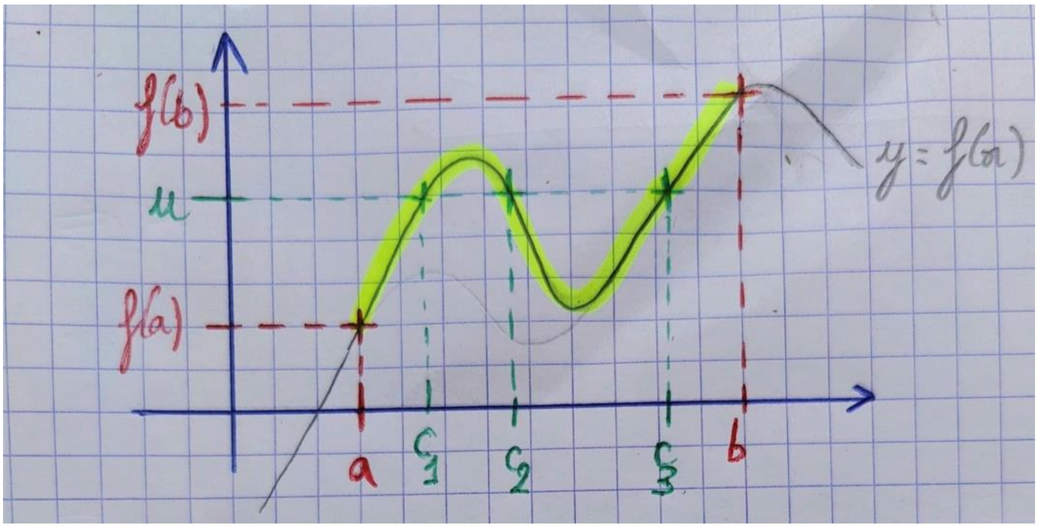
I. Définitions

Le théorème des valeurs intermédiaires (c'est-à-dire le TVI) est très important en analyse et revient à de nombreuses reprises.

Énoncé

Soit f:[a,b]→R une fonction continue. Pour tout réel u compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c)=u.

II. Illustration



Remarque : Il ne faut pas oublier d'écrire que la fonction est continue sur un intervalle. C'est l'hypothèse clé de ce théorème.

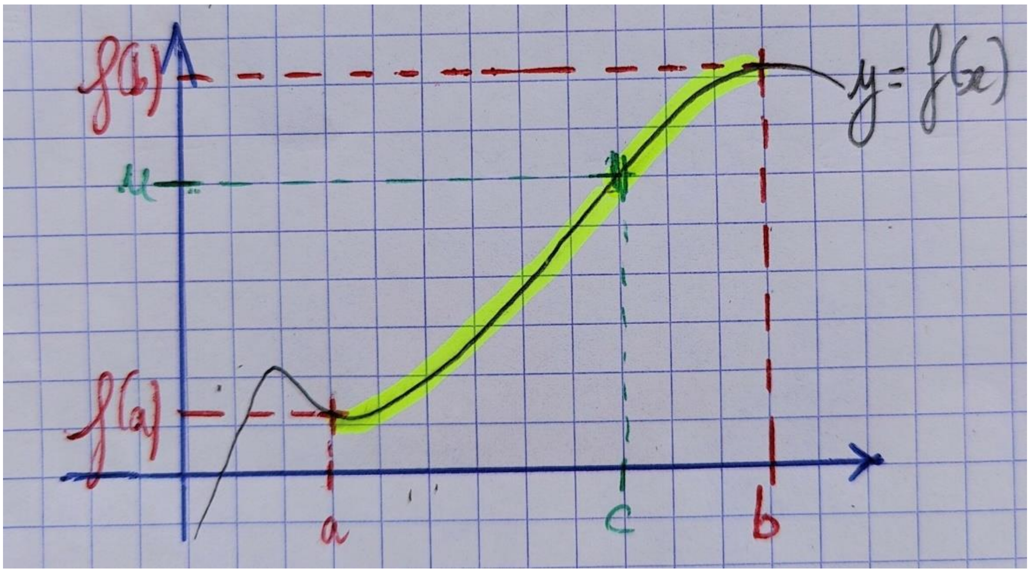
Chapitre II : Théorème de la bijection

C’est un corollaire (c’est-à-dire une proposition déduite) du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute ici l’hypothèse que la fonction soit strictement monotone sur l’intervalle [a,b].

I. Énoncé

Soit f:[a,b]→R une fonction **continue et strictement monotone**. Pour tout réel u compris entre f(a) et f(b), il existe **un unique** réel c compris entre a et b tel que f(c)=u.

II. Illustration



Remarque : Dans les conclusions du théorème, la différence par rapport au TVI est qu’il n’y a qu’un seul antécédent à u (on le voit dans l’illustration, où il n’y a plus qu’un seul c qui vérifie f(c)=u et non pas trois). C’est la stricte monotonie qui induit cela !

Chapitre III : Théorème des accroissements finis

Pour les fonctions continues et dérivables sur un intervalle.

I. Énoncé – version égalité

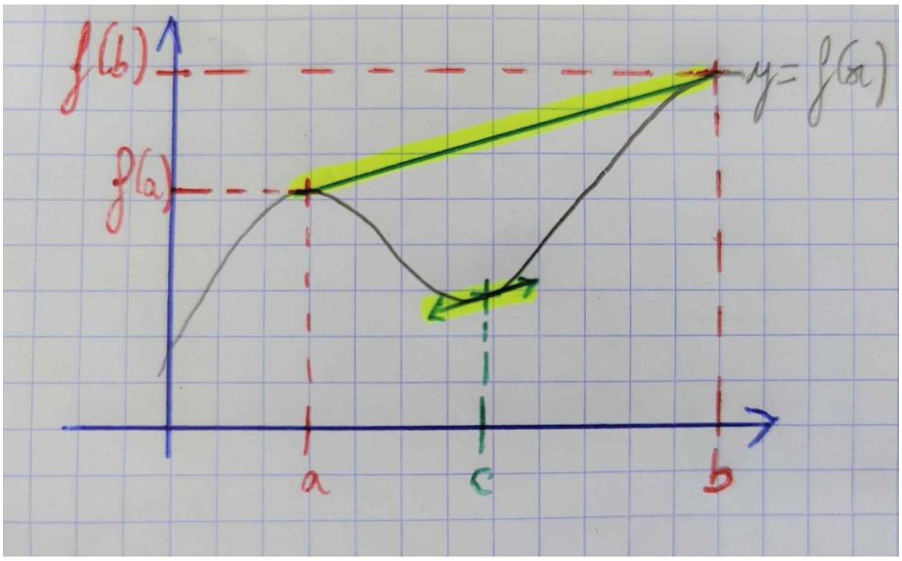
Soit f:[a,b]→R une fonction continue sur [a,b] et **dérivable** sur]a,b[. Alors, il existe un c appartenant à [a,b] tel que :

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

ou autrement dit :

$f(b)-f(a)b-a=f'(c)$

II. Illustration



Remarques

- Il ne faut pas oublier l'hypothèse de dérivabilité de la fonction sur un intervalle ouvert (]a,b[).
- Le théorème énonce que la tangente à la courbe en c a la même inclinaison que la pente de la droite reliant f(a) à f(b).