FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 4 : Etude graphique d'une fonction

Chapitre I : Rappel

On munit le plan d'un repère orthonormal (O, i , j)

I. Définition

Un repère étant choisi, on appelle représentation graphique d'une fonction f l'ensemble des points M de coordonnées (*x ; y*) lorsque *x* prend toutes les valeurs de *Df* et que $y = f(x)$.

On dit aussi courbe représentative de la fonction *f*. On dit que la courbe a pour équation $y = f(x)$.

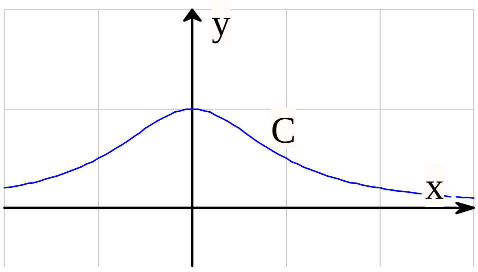
II. Méthode

On calcule des images en nombre suffisant et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la fonction *f*, qui à *x* associe sur [– 2 ; 3] tel que $f(x)= 1 + x^2$

x	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1

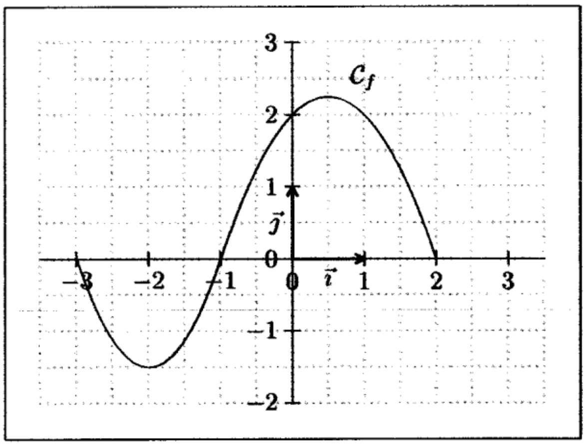


III. Lecture graphique d'images et d'antécédents

Pour déterminer l'image de x par f, on place x en abscisse puis on lit l'ordonnée sur la courbe.

Pour déterminer les antécédents de k par f, on place k en ordonnée puis on cherche les abscisses des points d'intersection de la droite horizontale d'équation y = k avec la courbe.

Exemples :



Sur la courbe suivante, déterminer :

1. L'ensemble de définition de f.

Df = [– 2 ; 2]

2. f(1) ; f(0).

f(1) = 2 ; f(0) = 2.

3. Image de – 2 ; de 2.

L'image de – 2 est – 1,5 et l'image de 2 est 0.

4. Antécédent(s) de – 2 ; de – 1,5 ; de 2.

– 2 n'a pas d'antécédent ; l'antécédent de – 1,5 est – 2 ;les antécédents de 2 sont 0 et 1

5. x tels que f(x) = 0 ; f(x) = 1.

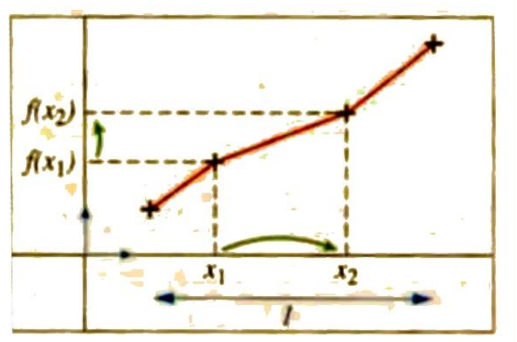
S = { – 3 ; – 1 ; 2 }

IV. Sens de variations

f est une fonction définie sur un intervalle *I*.

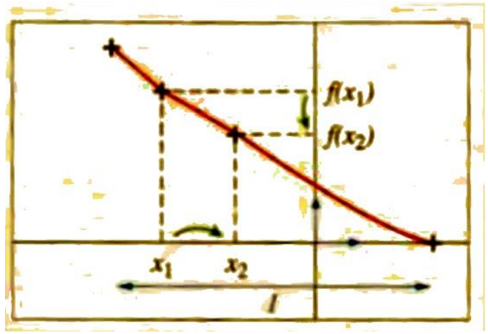
- Dire que *f* est croissante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Autrement dit, les images réels x_1 et x_2 sont rangées dans le même ordre que x_1 et x_2



- Dire que *f* est croissante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de *I*, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Autrement dit, les images réels x_1 et x_2 sont rangées dans l'ordre inverse que x_1 et x_2.



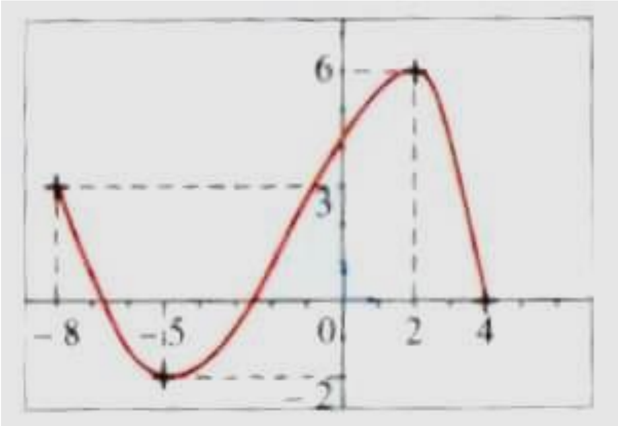
V. Extremum

La fonction *f* admet un maximum *f(a)* en *a* sur l'intervalle *I* lorsque, pour tout *x* de *I*, $f(x) \leq f(a)$. La fonction *f* admet un minimum *f(b)* en *b* sur l'intervalle *I* lorsque, pour tout *x* de I, $f(x) \geq f(b)$.

Exemple :

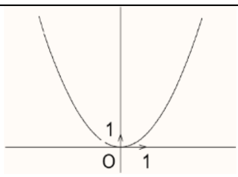
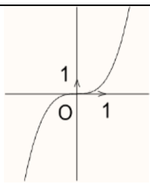
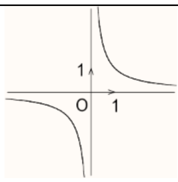
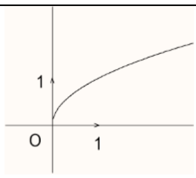
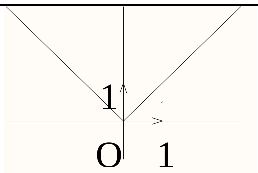
Soi f la fonction représentée ci-dessous.

Quels sont les extremums de *f* ? Pour quelles valeurs sont-ils atteints ?



La fonction *f* admet un minimum en – 5 qui vaut –2 et un maximum en 2 qui vaut 6.

VI. Fonctions de reference

	Courbe représentative	Tableau de variation	Variation
$f(x)=x^2$ Df =ℝ		x : $-\infty$ 0 $+\infty$ f(x) : ↘ ↗	f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$
$f(x) = x^3$ Df =ℝ		x : $-\infty$ $+\infty$ f(x) : ↗	f est croissante sur ℝ
$f(x)=\frac{1}{x}$ Df =ℝ		x : $-\infty$ 0 $+\infty$ f(x) : ↘ ‖ ↘	f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$ Df =ℝ		x : 0 $+\infty$ f(x) : ↗	f est croissante sur $[0\,;+\infty[$
$f(x)=\lvert x\rvert$ Df =ℝ		x : $-\infty$ 0 $+\infty$ f(x) : ↘ ↗	*f* est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$

Chapitre II : Interprétation graphique des limites

I. Définitions

Une branche infinie du graphe d'une fonction est une partie de la courbe qui s'éloigne infiniment de l'origine. Nous étudions deux types de branches infinies :

• Quand la courbe se rapproche de plus en plus d'une droite lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, cette droite est appelée une asymptote au graphe de la fonction.

• Quand la courbe semble regarder dans une direction d'une droite mais tout en s'en éloignant de cette droite, on dit que la courbe possède une branche parabolique dont l'axe est donné par la direction que regarde la courbe.

II. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie à l'infini

a) Intuitivement

On dit que la fonction f admet pour limite L en +∞ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

b) Définitions :

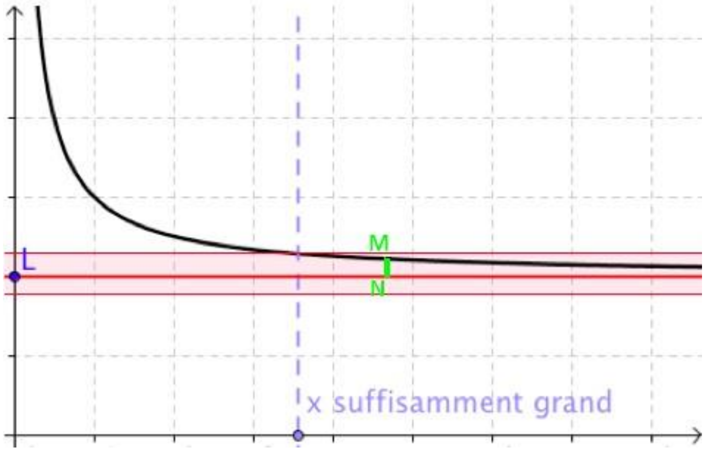
- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en +∞ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{L}$.

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en −∞ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

c) Exemple

La fonction définie par $f(x) = 2+\frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.



Remarque :

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.

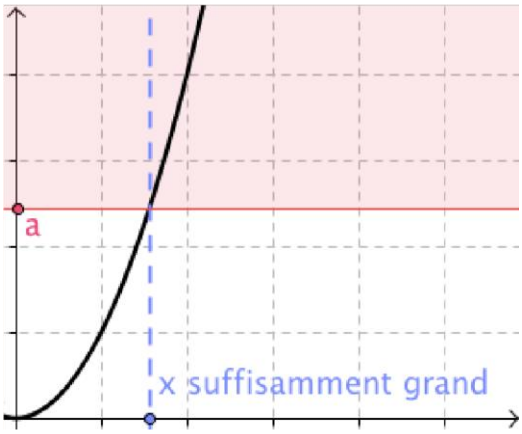
2. Limite infinie à l'infini

a) Intuitivement

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

b) Exemple

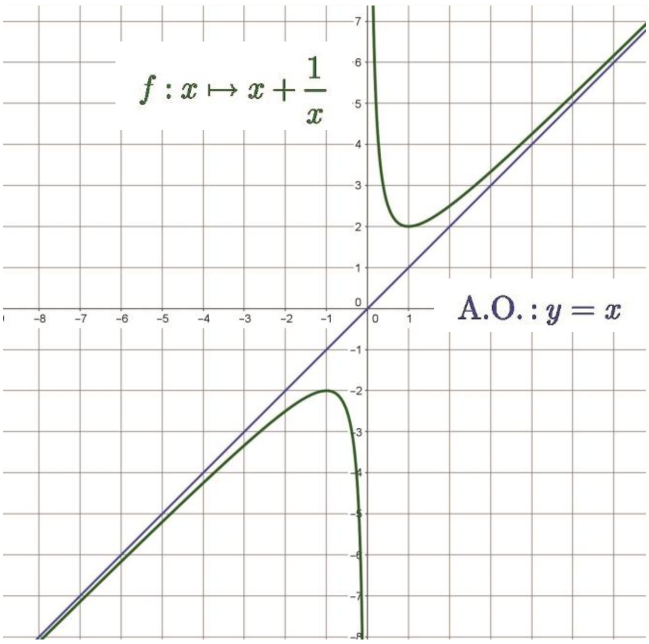
La fonction définie par $f(x) = x^5$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.



c) Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}} = \mathbf{a} \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\boldsymbol{f(x) - ax}) = \boldsymbol{b}$

⇛La courbe de la fonction admet une asymptote oblique à la droite $y=ax+b$

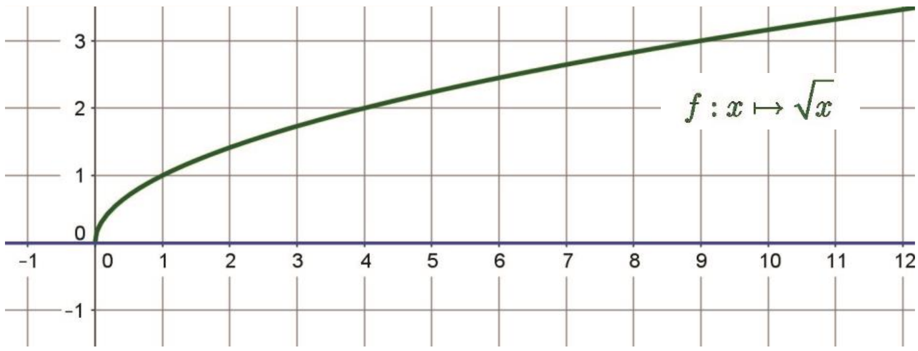


d) Branche parabolique de direction asymptotique (O*x*)

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}} = \mathbf{0}$

⇛La courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox)

(La courbe regarde dans la direction de l'axe des abscisses mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$, mais $f(x)$ est négligeable, c'est à dire petit par rapport à x.)

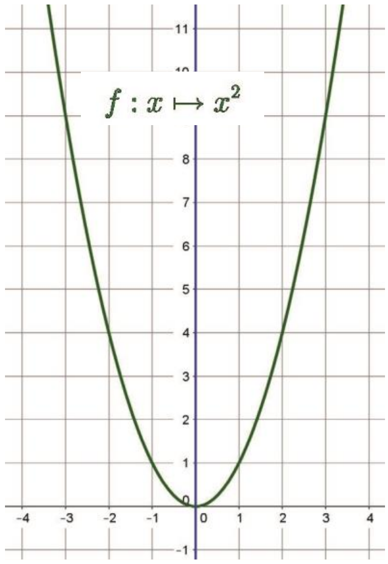


e) Branche parabolique de direction asymptotique (Oy)

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

La courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy).

(La courbe regarde dans la direction de l'axe des ordonnées mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$, et $f(x)$ est grand par rapport à x.)

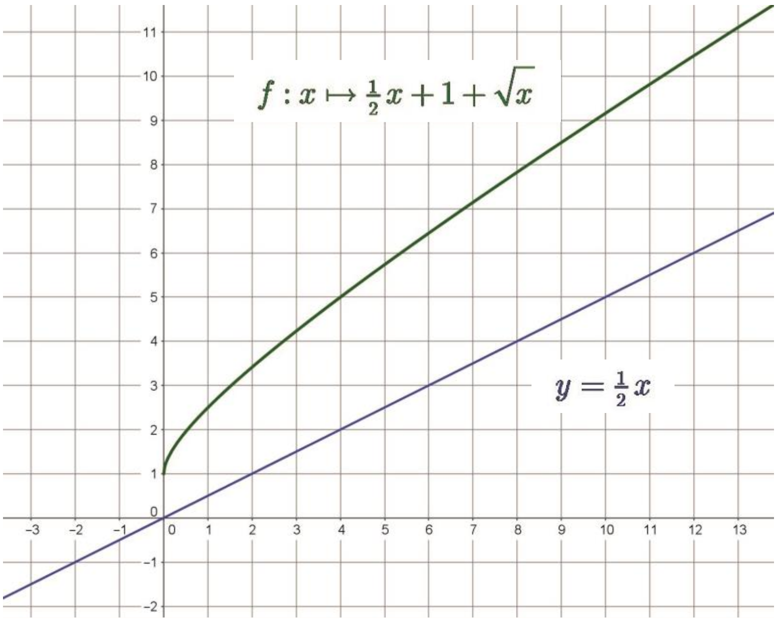


f) Branche parabolique de direction asymptotique y=a*x*

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathbf{a}\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$

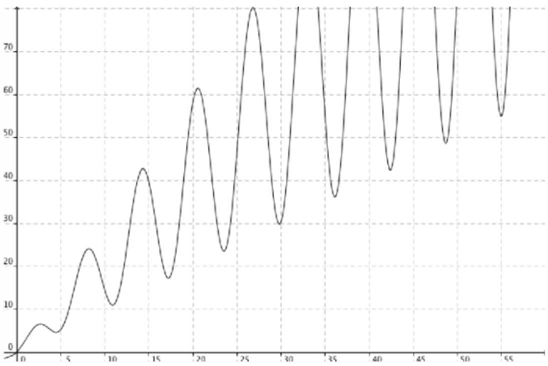
⇛La courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction asymptotique y=a*x*

(La courbe regarde dans la direction de la droite *y=ax* mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque Plus précisément : lorsque x→±∞, le rapport $\frac{f(x)}{x}$ →a, mais la différence (*f(x)* – *ax*) →±∞, c'est-à-dire le graphe de *f* s'éloigne de plus en plus de la droite y= ax).

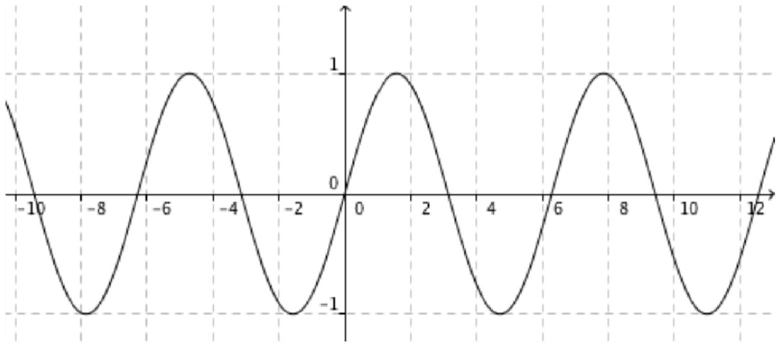


Remarques

- Une fonction qui tend vers +∞ lorsque *x* tend vers +∞ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



III. Limite d'une fonction en un réel A

a) Intuitivement

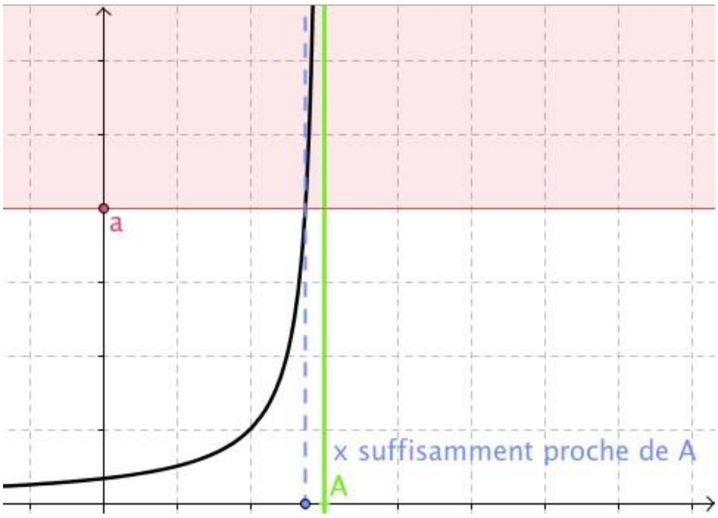
On dit que la fonction *f* admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que *x* soit suffisamment proche de A.

b) Définition

La droite d'équation $x = A$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f si : $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$.

c) Exemple

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque *x* tend vers A. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que *x* est suffisamment proche de A.



Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon x>A ou *x*<A.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par *f(x)*= $\dfrac{1}{x}$

- Si $x < 0$: Lorsque *x* tend vers 0, *f(x)* tend vers $-\infty$ et on note :

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$

- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, *f(x)* tend vers $+\infty$ et on note :

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0

Chapitre III : Interprétation graphique des continuités et dérivabilités

I. Continuité

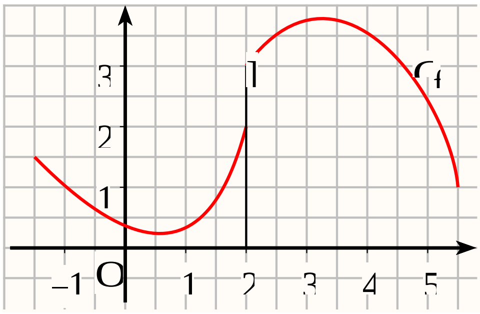
1. Définition

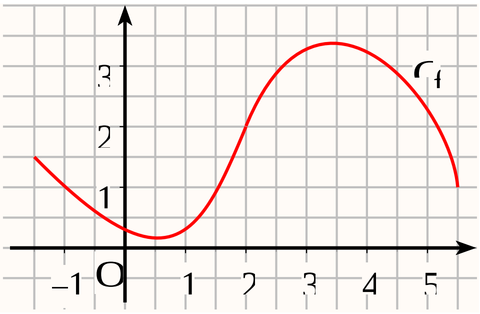
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction f est continue sur un intervalle I si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

2. Graphe

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.





Fonction f discontinue en 2

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 3 \neq f(2)$

Fonction f continue sur [−1, 5 ; 5, 5]

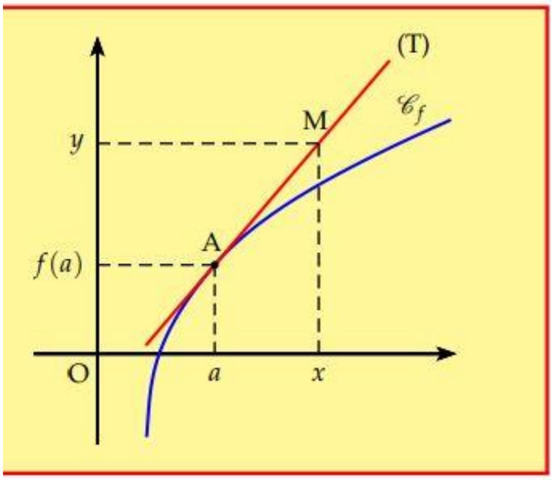
La fonction de gauche représente une discontinuité par "saut". C'est le cas par exemple de la fonction partie entière ou plus pratiquement de la fonction qui représente les tarifs postaux en fonction du poids (brusque changement de tarif entre les lettres en dessous de 20 g et de celles entre 20 g et 50 g).

II. Dérivabilité

1. Définition

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative *Cf* de la fonction *f* admet au point A (a, *f*(a)) une tangente de coefficient directeur f(a) dont l'équation est

(T) : y = f'(a) (x − a) + f(a)



Remarque : Il est important de retenir que le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point