FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 3 : Fonction exponentielle neperienne

Chapitre I : Définition de la fonction exponentielle

I. Théorème 1:

Il existe une unique fonction $\boldsymbol{f}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

Pour tout nombre $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f'(x)} = \boldsymbol{f(x)}$, et $\boldsymbol{f(0)} = \mathbf{1}$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On la note $\boldsymbol{exp}$.

Démonstration exigible :

L'existence d'une telle fonction est admise.

Démontrons l'unicité d'une telle fonction :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

▪ Montrons d'abord que pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = f(x) \times f(-x)$

$k'(x) = (f(x) \times f(-x))' = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$ (puisque ' $= f$)

Donc $\boldsymbol{k}$ est une fonction constante

Or $k(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $k(x) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$

$f(x) \neq 0$ car s'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$ alors on aurait : $f(a) \times f(-a) = 0$ ce qui est impossible puisque $f(a) \times f(-a) = 1$ donc $f(x) \neq 0$

▪ Montrons maintenant l'unicité d'une telle fonction :

Soit g une fonction différente de f telle que g soit aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$g' = g$ et $g(0) = 1$

Soit $h(x)= \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. g ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x)= \frac{f'(x)\,.\,g(x)-f(x)g'(x)}{g^2\,(x)} = \frac{f(x)\,.\,g(x)-f(x)gx)}{g^2\,(x)} = 0$

puisque $f' = f$ et $g' = g$ Donc la fonction h est constante :

$h(x)= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$

Ce qui prouve que f et g sont identiques. Ce qui prouve l'unicité de la fonction f.

II. Conséquences immédiates

- La fonction exponentielle exp :$x\rightarrow$ exp(x) est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(exp)' = exp$ et $exp\ (0)=1$
- Pour tout nombre x, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \frac{1}{exp\ (x)}$

Démonstration :

On sait que : $exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(exp)'= exp$ et $exp(0)=1$ par définition.

● Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(x) \neq 0$ et $exp\ (-x) = \frac{1}{x}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)= exp(x)$x $exp\ (-x)$

f'(x)= (exp(x)x exp (-x))'= exp(x)x exp (-x) - exp(x)x exp (-x) =0

Donc f est une fonction constante

Or f(o)= $exp(0)$ x $exp(0)$ =1

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)$=1

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(x)$x $exp\ (-x)$ =1

Comme $exp(x) \neq 0$ (nous l'avons démontré précédemment) alors en divisant par $exp(x)$ on obtient :

pour tout tout x de $\mathbb{R}$, $exp(-x) = \frac{1}{exp\ (x)}$

III. Nouvelle notation

L'image de 1 par la fonction exponentielle est unique et est noté e ($exp(1) = e^1 = e$) . Ce **nombre e** est un nombre irrationnel proche de 2,718 appelé nombre de Néper. On adopte alors la notation $\boldsymbol{exp(x) = e^x}$ **.**

Soit f(x) = lnx. F est définie, continue et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$. f est donc une bijection sur $]0\ ;+\infty[$ et admet une bijection réciproque. On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, que l'on note f-1(x)= e^x

Chapitre II : Propriétés de la fonction exponentielle

On pose e = $\boldsymbol{exp}$ (1)

Une calculatrice indique e ≈ 2,718281828

Conséquences :

pour tout entier relatif n, $exp(n)$ = $((exp(1))^n$

On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels On a donc :

Pour tout nombre $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^x}$

On le lit : « exponentielle de $\boldsymbol{x}$ » ou « e exposant x »

D'où les notations simplifiées :

- $\boldsymbol{e^0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{e^1 = e}$

Pour tout nombre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$:

- $\boldsymbol{e^{a+b} = e^a \times e^b}$
- $\boldsymbol{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$
- $\boldsymbol{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$

Pour tout nombre $\boldsymbol{x}$ et pour tout entier relatif $\boldsymbol{n}$,

- $(\boldsymbol{e^x})^{\boldsymbol{n}} = e^{nx}$

I. Etude d'une fonction exponentielle

1) Variation de la fonction exponentielle

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$

Donc $e^x \geq 0$

Comme $e^x \neq 0$ alors pour tout réel x, $e^x > 0$

Théorème 6:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:

Pour tout nombre réel x, $(e^x)' = e^x$

Or pour tout réel x, $e^x > 0$

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences importantes:

Pour tout nombres a et b:

● $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$ ● $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$

Ces deux équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur

$\mathbb{R}$.

Elles sont surtout utilisées lors de la résolution d'équations et d'inéquations comme dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1: Résolvez l'équation suivante : $e^{3-x} = 1$

Cette équation équivaut à : $e^{3-x} = e^0$ qui est équivalente à l'équation : $3 - x = 0$

Donc $x = 3$

Cette équation a pour solution 3.

Exemple 2: Résolvez l'inéquation suivante : $e^{2x} < e^x$ Cette inéquation est équivalente à l'inéquation : $2x < x$ qui est équivalente à: $x < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $]-\infty; 0]$

Exemple 3: Résolvez l'équation suivante : $e^{2x} - 2e^x = -1$

Cette équation est équivalente à :

$(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

Posons $\boldsymbol{X = e^x}$ on obtient l'équation :

$X^2 - 2X + 1 = 0$

$(X - 1)^2 = 0$

Donc :

$X = 1$ On obtient donc :

$e^x = 1$ c'est-à-dire $e^x = e^0$

qui a pour solution : $\boldsymbol{x = 0}$

Cette équation a pour solution 0

2) 2) Limites à l'infini de la fonction exponentielle **Théorème 7:**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration exigible :

● Tout d'abord démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en comparant les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

$f'(x) = e^x - 1$

Pour $x \geq 0$ $e^x \geq e^0$ (car la fonction exponentielle est croissante) soit $e^x \geq 1$ et donc $e^x - 1 \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante pour $x \geq 0$

Pour $x \leq 0$ $e^x \leq e^0$ (car la fonction exponentielle est croissante) soit $e^x \leq 1$ et donc $e^x - 1 \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante pour $x \leq 0$

On obtient donc le tableau de variation de f ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

La fonction f admet 1 comme minimum

Par conséquent pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ à fortiori, pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) > 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$ soit **pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > x$**

Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty}$

● Maintenant démontrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$

$\lim\limits_{y\mapsto+\infty} e^y = +\infty$ $\lim\limits_{y\mapsto+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$ Or, donc . **Ce qui prouve que $\lim e^x = 0$**

$x \to -\infty$

3) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$	0	1	e	$+\infty$

3) Limites importantes

Théorème 8:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Démonstration :

- La fonction exponentielle est dérivable en 0 et exp'(0) = 1 et exp(0) = 1

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{exp(0+x) - exp(0)}{x - 0}$$

C'est la limite lorsque x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et $0 + x$ on a donc :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{exp(0+x) - exp(0)}{x - 0} = exp'(0) = 1$$

On obtient donc : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en

comparant les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = e^x - x$

Or, pour tout nombre x: $e^x > x$ (vu dans la démonstration du théorème 7)

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		1	

Ainsi pour tout nombre x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$

Ce qui prouve que tout x strictement positif $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$, soit en divisant par x (qui est non nul puisque strictement positif)

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

Or, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème des comparaisons : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- Maintenant démontrons que lim $xe^x = 0$

$x \to -\infty$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ et donc: $xe^x = -\frac{y}{e^y}$

Or nous venons de démontrer que: $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ on obtient donc : $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

A fortiori on a donc : $\lim_{y \mapsto +\infty} -\frac{y}{e^y} = 0$

Ce qui prouve que $\mathbf{\lim_{x \to -\infty}} xe^x = \mathbf{0}$

Chapitre III : Etude de la fonction $e^{u(x)}$

- Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur l'intervalle I par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$ est dérivable sur I et on a :

$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$

- Comme la fonction exponentielle est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction $\boldsymbol{u}'$
- Comme la fonction exponentielle est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de $\boldsymbol{f}$ est le même que celui de $\boldsymbol{u}$.
- **Pour tout $\boldsymbol{x}$ de I** $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})} > \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemples :

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x^2-5x+1}$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$u'(x) = 6x - 5$

$u'(x) = 0$ pour $x = \frac{5}{6}$ $\quad$ $u'(x) \geq 0$ pour $x \geq \frac{5}{6}$ et $u'(x) \leq 0$ pour $x \leq \frac{5}{6}$

$f'(x) = (6x - 5)\ e^{3x2-5x+1}$

Comme $e^{3x2-5x+1}$ est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{1}$	↗	$+\infty$

Sachant que lim $e^x = +\infty$ on obtient le tableau de variation de la fonction f:

$x \longmapsto +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$e^{-\frac{13}{12}}$	↗	$+\infty$

–

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e_x$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $u(x) = \frac{1}{x}$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$ Etudions les variations de u :

$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$u'(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{}$

Comme e_x est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	‖	$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Sachant $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$ que , que lim $e^x = +\infty$ et que lim $e^x = 1$, on obtient le tableau de

$x \mapsto +\infty$ $x \mapsto 0$

variation de la fonction f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	1