FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Table des matières

Partie 1 : Généralité sur la fonction numérique

Chapitre I : Rappel

I. Définition

Le terme fonction est la notation ***y = f(x).***

Une fonction f : A → B est la donnée de deux ensembles A (le domaine) et B (l'image) et d'un procédé qui à tout x ∈ A associe un (et un seul) y ∈ B.

On écrit : y = f(x) ou x → f(x).

On dit que y est l'image de x et que x est un antécédent de y.

Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre x appartenant à un ensemble *D* un nombre *y*

On note : *f : x α f(x)* ou *x →f* *y* ou encore *y = f(x)*

On dit que *y* est l'image de *x* par la fonction *f* et que *x* est un antécédent de *y* par *f*.

Exemple :

$f(x) = x^2 - 2x - 15$

L'image de 7 par f est $f(7) = 7^2 - 2x7 - 15 = 49 - 14 - 15 = 20$.

0 a deux antécédents : – 3 et 5 car $f(-3) = f(5) = 0$. 2 est un antécédent de –15.

II. Domaine de définition

Pour une fonction *f(x)* donnée, on appelle ensemble de définition l'ensemble *D* des valeurs de *x* pour lesquelles on peut calculer cette expression.

En général, on indique seulement le procédé *x → f(x),* il s'agit alors déterminer le domaine de définition de f que l'on note ***Df***. On travaillera (essentiellement) sur des intervalles (ou des unions d'intervalles) de :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ (segment), $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ (intervalle ouvert borné), $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a$

Exemples :

$f(x) = \frac{2x+7}{3x-4}$

il faut que $3x - 4 \neq 0$ donc : $Df = \mathbb{R} - \{ \frac{4}{3} \} =]-\infty ; \frac{4}{3} [\cup] \frac{4}{3} ; +\infty [$

On dit aussi que $\frac{4}{3}$ est une valeur interdite pour la fonction *f*.

III. Graphe d'une fonction

Soit f : ℝ → ℝ une fonction de domaine *Df* (qui sera un intervalle ou une union d'intervalles).

La courbe représentative de *f*, encore appelée graphe de *f*, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé par les points de coordonnées (*x,f(x)*), *x* parcourant *Df*. En général, on ne pourra tracer qu'une partie de la courbe de f.

On aurait pu définir une fonction par son graphe : un graphe Γ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe au plus un $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in \Gamma$. Ce réel, s'il existe, est appelé l'image de x par f et est noté $f(x)$.

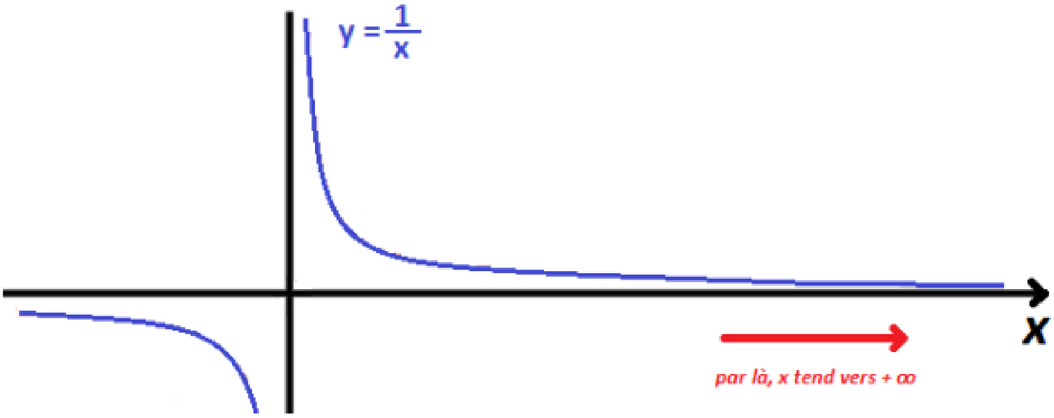
Chapitre II : Limites et continuités d'une fonction

I. Limites

La

Objectifs d'apprentissage	Contenus	Observations
L'apprenant doit être capable de (d') : • Résoudre les problèmes de limites	• Recherche de limites : - *Limite de la composée de deux fonctions* - *Théorème de comparaison* - *Théorème de gendarmes et théorème d'encadrement*	• Cas particulier : trouver une limite par un encadrement. • Si une fonction est croissante sur]a, b [avec a < b, et si elle est majorée, alors elle admet une limite à gauche en b

limite d'une fonction, pour simplifier, c'est « vers quoi tend » la fonction.
Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse :



On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 sans jamais la toucher.

Et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose.
On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Limite d'une fonction à l'infini

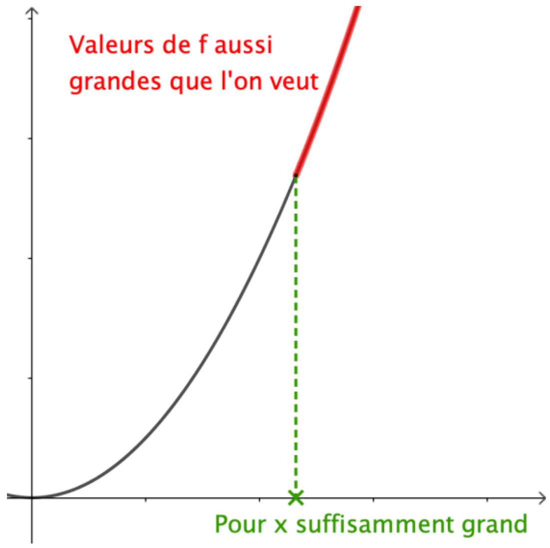
1. Limite infinie en ∞

Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, si pour $tout\ x$ suffisamment grand $f(x)$ est aussi grand que l'on veut.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On a par exemple : $f(200) = 200^2 = 40000$
$f(20000) = 20000^2 = 400\ 000\ 000$

Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.



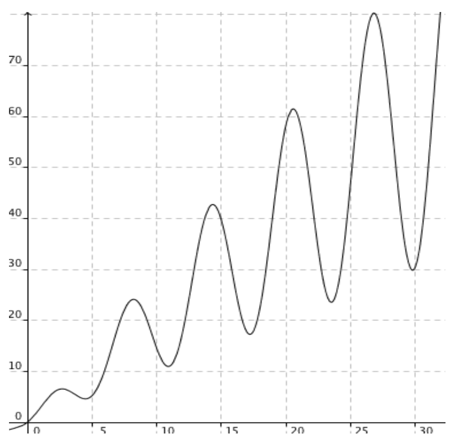
Si on prend un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, pour tout réel a, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

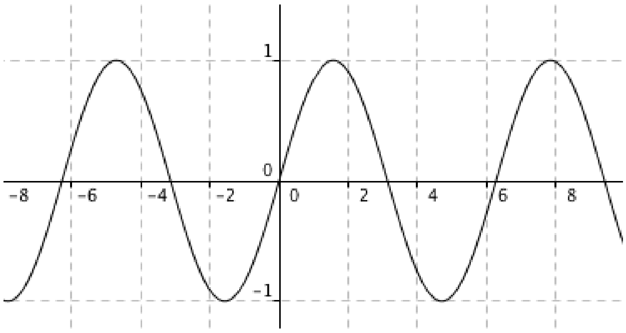
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ b[$, pour tout réel b, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

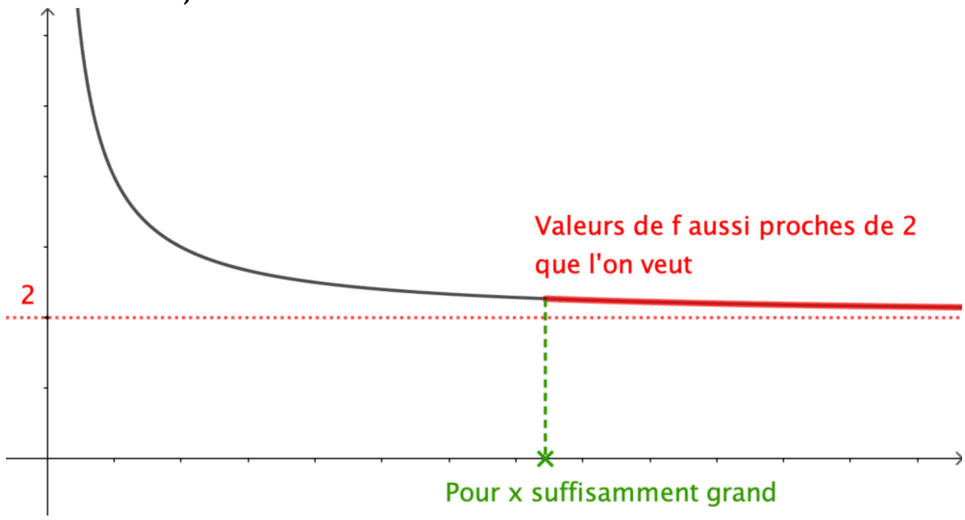


- Limite finie en ∞

Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite L en $+\infty$**,
si $pour\ x\ suffisamment\ grand\ la\ valeur\ de\ f(x)$ reste le plus proche possible que l'on veut de L
Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

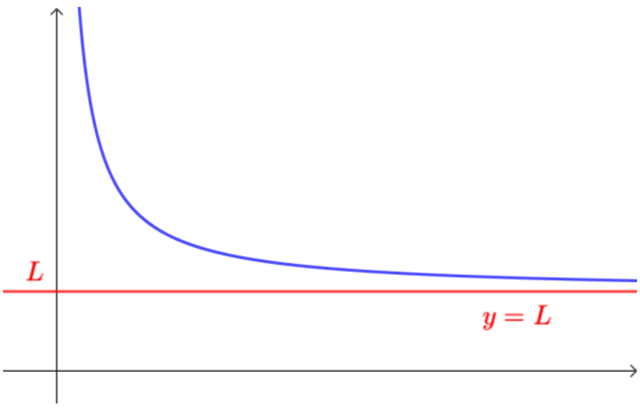
Exemple :
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
On a par exemple :
$f(400) = 2 + \frac{1}{400} = 2{,}04$
$f(100000) = 2 + \frac{1}{100000}$
$= 2{,}00001$



Les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $y = 2$ sans jamais la toucher.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a des définitions analogues en $-\infty$.

- Limites des fonctions de référence

Propriétés :

- $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Limite d'une fonction en un réel A

1. Définition

Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite $+\infty$ en $\boldsymbol{A}$**,
si $pour\ tout$ x $suffisamment\ grand, f(x)$ est aussi grand que l'on veut.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers le nombre 3.

On a par exemple :

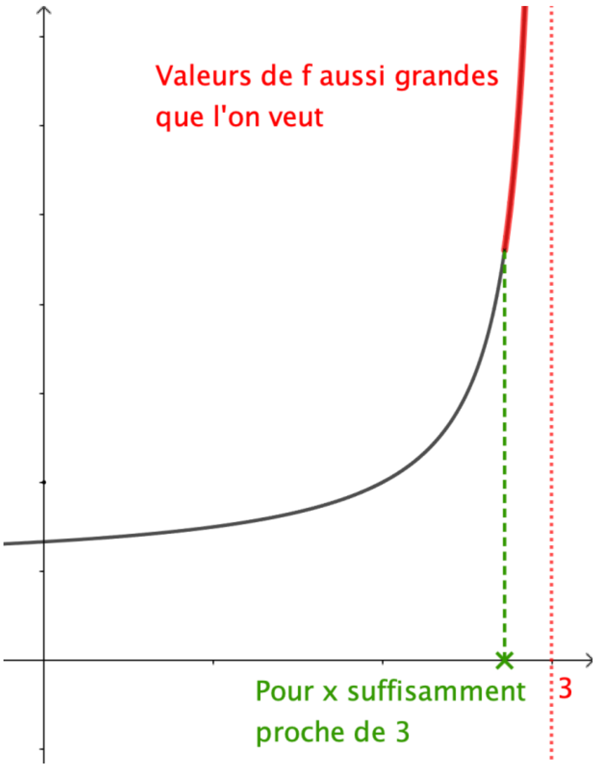
$$f(2{,}99) = \frac{1}{3 - 2{,}99} + 1 = 101$$

$$f(2{,}999) = \frac{1}{3 - 2{,}999} + 1 = 1\,001$$

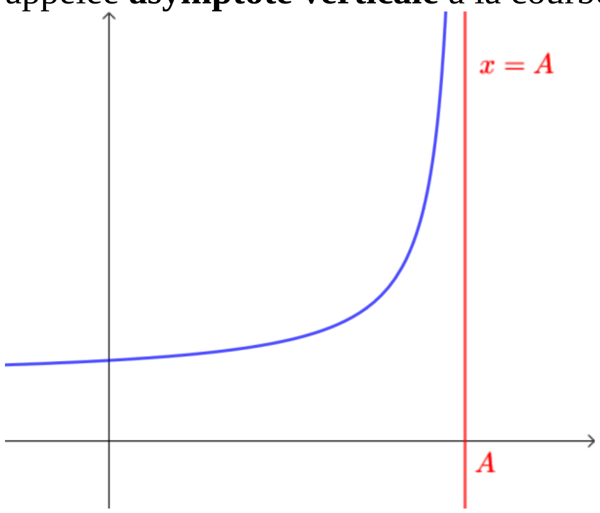
Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de 3.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ sans jamais la toucher.

Si on prend un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment proche de 3.



<u>Définition :</u> Si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = A$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f.

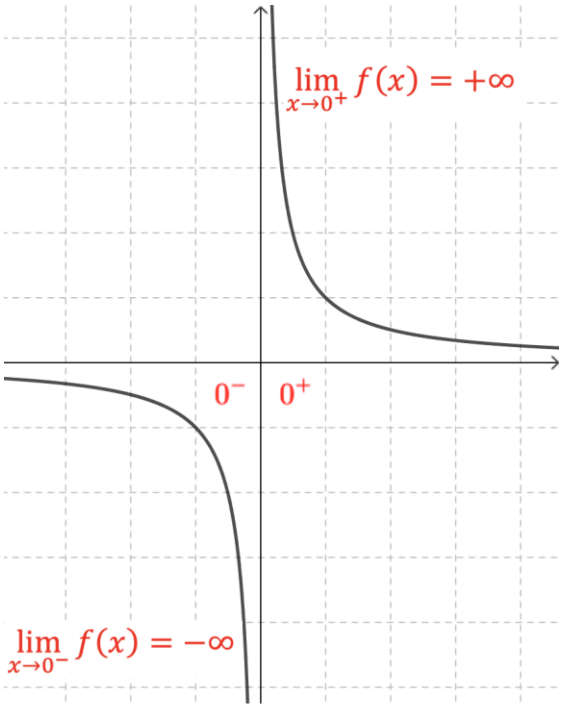


<u>Définitions :</u> - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

- Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :
Considérons la **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction f admet des limites différentes en 0 suivant les valeurs de x :
$x > 0$ ou $x < 0$.



● Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
On parle de limite à gauche de 0

● Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
On parle de limite à droite de 0.

<u>Méthode :</u> Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.
a) Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5.
b) Compléter alors le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					

Correction

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = +\infty$

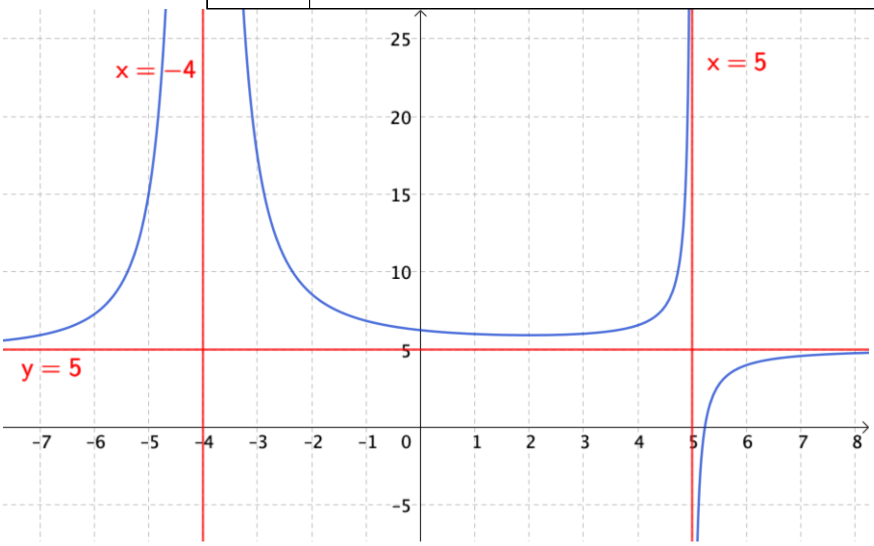
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

• $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$	5	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	5



Opérations sur les limites

1. Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

le nombre α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT (∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT (∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

<u>Méthode :</u> Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1-2x}{x-3}$

Correction

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2) = \ ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x - 5 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \, donc \lim\limits_{x \to -\infty} 3 + x^2 = +\infty \end{cases}$$

Comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 1 - 2x = 1 - 2 \times 3 = -5 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} x - 3 = 0^- \end{cases}$$

Une limite de la forme « $\frac{5}{0}$ » est égale à « ∞ ».

Donc, d'après la règle des signes, une limite de la forme « $\frac{-5}{0^-}$ » est égale à « $+\infty$ ».

D'où, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$.

2. Cas des formes indéterminées

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$\infty - \infty$ $\quad$ $0 \times \infty$ $\quad$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\quad$ $\frac{0}{0}$

<u>Méthode :</u> Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (1)

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

Correction

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty. \end{cases}$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$
Donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty.$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (2)

Calculer: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

Correction
a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0.$
Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}.$

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{x^2}{x}\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x\to-\infty}3+\frac{2}{x^2}=3\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}4-\frac{1}{x}=4$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}$$

• De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, donc, comme limite d'un produit :

$$\lim_{x\to-\infty}x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}=-\infty$.

<u>Méthode :</u> Lever une forme indéterminée à l'aide de l'expression conjuguée

Calculer: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Correction

a) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

• Comme limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$.
Et donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.
Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$.

b) • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to5} \sqrt{x-1}-2 = \sqrt{5-1}-2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to5} x-5 = 5-5 = 0 \end{cases}$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :
$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

• $\lim\limits_{x\to5} \sqrt{x-1}+2 = \sqrt{5-1}+2 = 4$
Donc, comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.
Soit : $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

<u>Méthode :</u> Déterminer une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

Correction

● $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

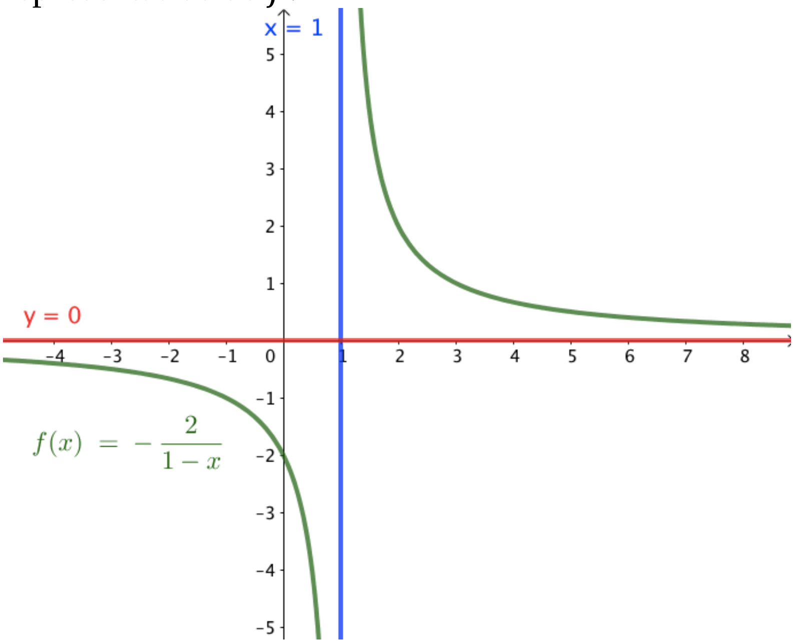
On prouve de même que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

● $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$

Et $\lim\limits_{x \to 1^+} 1 - x = 0^-$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



Limite d'une fonction composée

<u>Méthode :</u> Déterminer la limite d'une fonction composée

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Correction

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

En effet, si $x \to +\infty$, on a : $X = 2 - \frac{1}{x} \to 2$ et donc : $\lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Limites et comparaisons

1. Théorèmes de comparaisons

<u>Théorèmes :</u> Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I =]a\ ;\ +\infty[$.

- Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (Fig.1)

- Si pour tout x de I, on a $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (Fig.2)

<u>Remarque :</u> On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

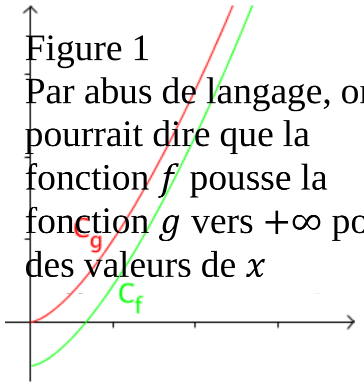


Figure 1
Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x

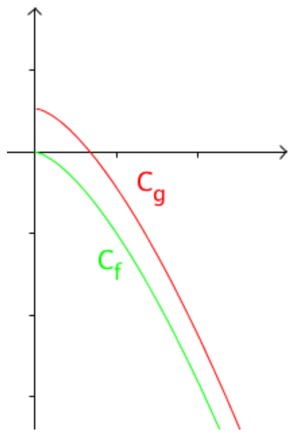


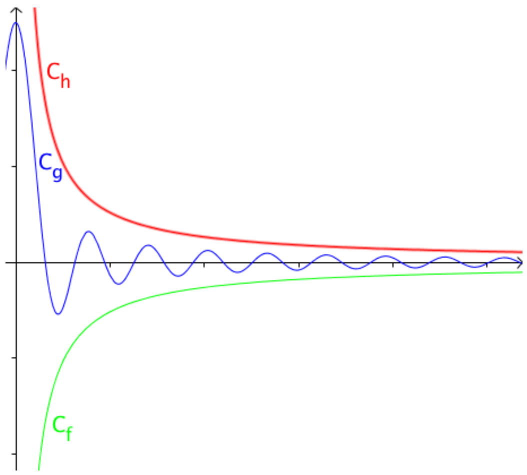
Figure 2

Démonstration dans le cas de la figure 1 :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ Donc tout intervalle $]m\ ;\ +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

- Théorème d'encadrement : théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes :
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\ ;\ +\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

<u>Remarque :</u> On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Calculer : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$

Correction

1) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.
Levons l'indétermination :
• $-1 \leq \sin x$
Donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

2) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• $-1 \leq \cos x \leq 1$
Donc : $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$
Et donc :

$$-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

$$-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}$$

Soit : $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$
• $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

Cas de la fonction exponentielle

1. Limites aux bornes

Propriétés :
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Démonstration au programme :

- La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$.
Donc, on a : $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.
Si on prend un réel a quelconque (aussi grand que l'on veut), il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite dépassent a, soit : $e^{n_1} > a$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a également, pour tout $x > n_1$: $e^x > e^{n_1}$.
Donc, pour tout $x > n_1$, on a : $e^x > e^{n_1} > a$.
Ainsi, tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x, dès que x est suffisamment grand.
Soit : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X}$, en posant $X = -x$
Or, $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$, comme limite d'un quotient.
Soit : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

<u>Méthode :</u> Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

Calculer les limites suivantes :
a) $\lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

Correction

a) $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

- Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$

En effet, si $x \to +\infty$, on a : $X = -3x \to -\infty$ et donc : $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0.$

- $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

- Comme limite d'une somme : $\lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x} = +\infty.$

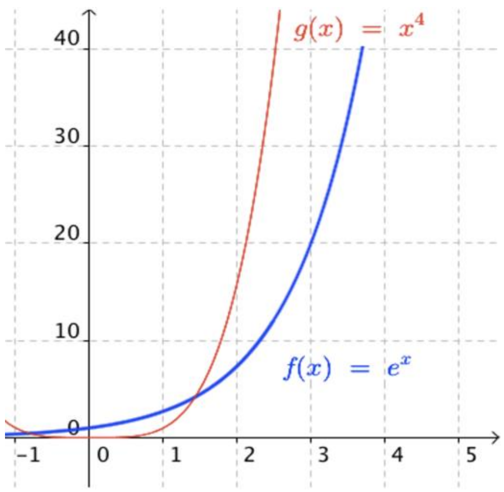
b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^{1} = e.$

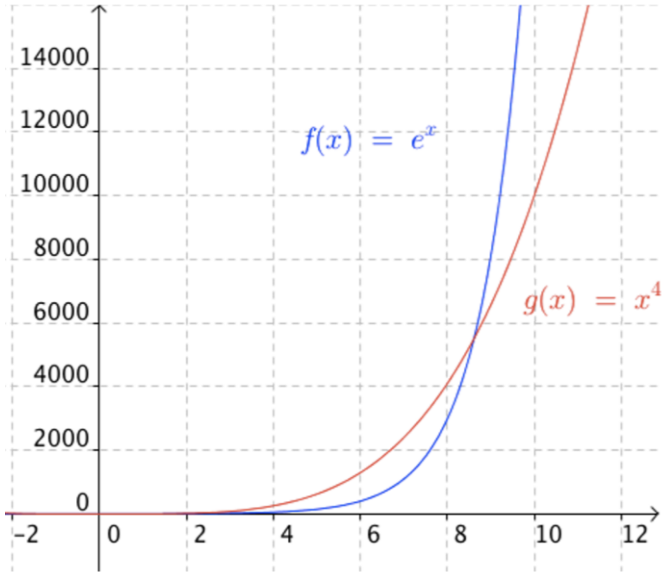
2. Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Exemple :

Observons la fonction exponentielle et la fonction puissance $x \longmapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.
Dans cette première fenêtre, la fonction puissance semble l'emporter devant la fonction exponentielle.



Mais on constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction puissance $x \longmapsto x^4$.



<u>Remarque :</u> Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$

Démonstration au programme du a :

- On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$

On calcule la dérivée de la dérivée f' :

$(f'(x))' = e^x - 1$.

Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$

Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 > 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	1 $\nearrow$
Signe de $f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$

On en déduit que pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.
Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.
Donc : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.
Et donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.
Soit : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

<u>Méthode :</u> Calculer une limite par croissance comparée

Calculer la limite suivante : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

Correction
● Le dénominateur, par exemple, comprend une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

● Par croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et de même : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.
Donc, comme inverse de limites : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

● Donc, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1$.

II. Continuité

1. Continuité en un point

a) Définition

On considère une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I et x_0 un point de I (on peut supposer pour l'instant que x_0 n'est pas une extrémité de I). On dira que f est continue en x_0 si :
La quantité $|f(x) - f(x_0)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut si $|x - x_0|$ est suffisamment petite.
Cela s'écrit : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Regarder si f est continue en x_0, revient à étudier les images réciproques d'intervalles de la forme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

a) Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- f est continue en un point a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue à droite de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a$
- On dit que f est continue à gauche de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a$
- f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point a de I.

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

b) Prolongement par continuité

Si $x_0 \notin$ Df, alors f n'est pas continue en x_0 ($f(xo)$ n'existe pas).
Il se peut que f admet une limite finie en x_0, on dit alors que f est prolongeable par continuité en x_0 et la fonction y définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x0} f(x) \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle prolongement par continuité de f en x_0

Exemple : Soit $f(x)=\dfrac{x^2\text{-}3x+2}{x\text{-}2}$
Montrez que f est prolongeable par continuité en 2 et déterminer son prolongement par continuité en g.

$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
$Df =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$
f n'est pas continue en $x_0=2$ car $2 \notin Df$
$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = 1$: finie

Alors, f est prolongeable par continuité en 2

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \\ g(2) = 1 \end{cases}$$

2. Continuité sur un intervalle

f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point a de I.
Si u et v sont continues sur l'intervalle I, alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I.
$\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

Chapitre III : Dérivabilité

I. Dérivabilité en un point

On dit que f est dérivable en x_0 ; $x_0 \in Df$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{existe et finie}$$

Dans ce cas, on l'appelle (la limite) dérivée de *f* en x_0, que l'on note $f'(x_0)$.
On pose $x-x_0 = h$, soit $x=x_0+h$. Si $x \to 0$ alors $h \to 0$
D'où la définition équivalente :
f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{h} \text{ existe et finie}$$

- *f* est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et finie}$$

Dans ce cas, on la note $f'_g(x_0)$ (dérivé à gauche en x_0)

- f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{existe et finie}$$

Dans ce cas, on la note $f'_d(x_0)$ (dérivé à droite en x_0)

$\Rightarrow$ f est dérivable en x_0 si et seulement si elle l'est à gauche et à droite de x_0 et $f'_g(x_0)= f'_d(x_0)$ que l'on note tout simplement $f'(x_0)$

Exemple : La fonction valeur absolue d'équation $f(x) = x$ est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = -x$ sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On obtient par calcul de limites : $f_g'(0) = -1$ et $f_d'(0) = +1$.
Ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1. Définition

On dit que *f* est dérivable sur un intervalle $I \in Df$ si et seulement si :
f est dérivable en tout point de *I*, c'est-à-dire $\forall x_0 \in I$, *f* est continue en x_0.

2. Propriété

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La somme et le produit, la composé des fonctions dérivables est dérivable.
- Le quotient de deux fonctions dérivables est dérivables là où le dénominateur diffèrent de 0.

III. Fonction dérivée

1. Définition

On définit sur *I* la fonction *f: x '→ f'(x)* . Cette fonction *f '* est appelée la fonction dérivée de la fonction *f* sur *I*.

2. Dérivées usuelles

a) Formule de dérivation

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x)=c$	$f'(x) = 0$
$f(x)=x$	$f'(x) =1$
$f(x)=ax$	$f'(x) = a$
$f(x)=x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x)=ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u=f^n$	$u' = \left(f^n\right)' = n\times f^{n-1}\times f'$
$f=u+v$	$f' = (u+v)' = u'+v'$
$f=u\times v$	$f' = (u\times v)' = u'v+v'u$
$f=\frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x)=u(ax+b)$	$f'(x)=a\times u'(ax+b)$

b) Dérivées des fonctions circulaires

$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=tgx$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$
$f(x)=\cot gx$	$f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot g^2 x)$

3. Variation et dérivées

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I.

$f'(x)=0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f constante sur I .

$f'(x)\geq 0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f croissante sur I .

$f'(x)\leq 0$ pour tout x de I $\Leftrightarrow$ f décroissante sur I .

Si $f'(x)>0$ pour tout x de I alors f est strictement croissante sur I .

Si $f'(x)<0$ pour tout x de I alors f est strictement décroissante sur I .

Chapitre IV : Primitive et integrale

I. Primitive

1. Définitions

- Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive sur I de f si F est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \int_a f(t)dt$ est l'unique primitive de f telle que $f(a) = 0$.

Exemple : $F(x)= 5x^2+4x-1$ est une primitive de $f(x)= 10x+4$ sur $\mathbb{R}$.
Car $F'(x)=10x+4=f(x)$.

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, on note $F(x) = \int f(x)\,dx$, se lit : « $F(x)$ égale primitive de $f(x)\,dx$ » ou « F(x) égale somme de $f(x)\,dx$ »

Exemple : $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k \ (k \mathcal{E} \ \mathbb{R})$$

2. Propriété

On admet les propriétés suivantes :

- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
- Si f admet une primitive sur un intervalle I, alors elle admet une infinité de primitive de f sur I alors toutes les primitives de f sont de la forme $G(x)= F(x)+k$ où $k \ \mathcal{E} \ \mathbb{R}$ (Autrement dit 2 primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante)
- Il existe une et une seule primitive de f qui vérifie une condition donnée pour une valeur de x donnée

Exemple : Déterminer toutes les primitives de f tel que $f(x)=x^{2k=}$
Déterminer la primitive qui est égale à 1 pour x=2

$F(x)= \frac{x^3}{3} +k$

F(2)= 1

$\frac{2^3}{3} + k=1$

$\frac{8}{3} + k =1 \Rightarrow k= 1- \frac{8}{3} = - \frac{5}{3}$

Donc $F(x)= \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$

3. Primitives usuelles

Si f et g sont des fonctions continues et ℷ ℰ ℝ ∗, on a :

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + g(x)dx$$

$$\int ℷ\, f(x)dx = ℷ \int f(x)dx$$

Fonction f	Primitive F
$f(x)=(x+b)^n, n\geq 1$	$F(x)=\frac{1}{n+1}(x+b)^{n+1}$
$f(x)=(ax+b)^n, n\geq 1 \text{ et } a\neq 0$	$F(x)=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n\geq 2$	$F(x)=\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$
$f(x)=\frac{1}{(ax+b)^n}, n\geq 2$	$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$F(x)=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$f(x)=\sqrt{ax+b}$	$F(x)=\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$
$f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$	$F(x)=\frac{3}{4a}(ax+b)\sqrt[3]{ax+b}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$F(x)=\frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x}$
$f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$	$F(x)=\frac{n}{(n+1)a}(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}$
$f(x)=\sin(ax+b), a\neq 0$	$F(x)=\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$f(x)=\cos(ax+b), a\neq 0$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

Fonction f	Primitive F
$f(x)=\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$F(x)=\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$u'.u^n,\ n\geq 1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n\geq 2$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'\sqrt[n]{u}$	$\frac{n}{n+1}u\sqrt[n]{u}$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u}}$	$\frac{n}{n-1}\frac{u}{\sqrt[n]{u}}$
$u'v + uv'$	uv
$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$u'.(v' o\ u)$	vou

4. Primitive par parties

u et v étant deux fonctions dérivables.
On a (u v)’ = u’v – uv’
Donc uv’ = (uv)’ – u’v
Alors $\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$
$\int \boldsymbol{uv'} = \mathbf{uv} - \int \boldsymbol{u'v}$ (Formule d’IPP)

Exemple : Déterminer à l'aide d'une primitivation par partie

$\int$ x cox x dx

Posons u=x u'=1

V'= cosx v= sinx

= x sinx - $\int sinx\, dx$

=x sinx + cosx+k

II. Integrale definie

1. Définition

Soit f une fonction définie et continue sur [a ;b] $\subset Df$.

F une primitive de f sur [a ;b] le nombre réel noté : $\int_a^b f(x)\, dx$ (se lit « intégrale de a à b de f(x) dx », définie par :

$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple: Calculer I= $\int_{-1}^{2} (3x^2 - x)dx$

I= $\left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$

I= $(2)^3 - \frac{(2)^2}{2} - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2}\right]$

I= $6 + 1 + \frac{1}{2}$

I= $7 + \frac{1}{2}$

I= $\mathbf{\frac{15}{2}}$

2. Propriété de l'integrale

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ **Relation de Chasles**
- $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx =$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. Intégration par parties

A l'aide de la primitivation par partie, on a :

$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ (Formule d'IPP)

Exemple : Calculer I = $\int_{a}^{\frac{\pi}{2}} xsinx$ dx

Posons u=x u'=1

v'=sinx v=-cosx

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xsin\, x$ = $[-xcosx]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ - $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -cos\, x\, dx$ = +$[+sinx]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$\boldsymbol{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xsin\, x}$ = +1