NOMBRES COMPLEXES : Formules de trigonométrie

Table des matières

Partie 3 : Formules de trigonométrie

Chapitre I : Généralité

I. Formules d'addition

Propriété :

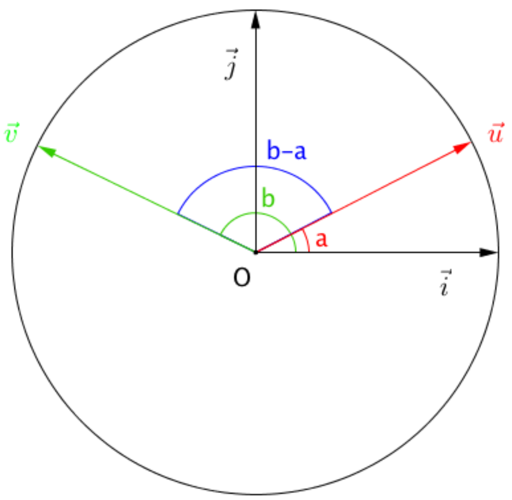
Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

Démonstrations :

- 1ère formule :

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que :

$(\vec{\imath}\,;\vec{u})=a$ et $(\vec{\imath}\,;\vec{v})=b$.

On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

On a également :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

$= 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$

D'où : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- 2e formule :

$\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) =$
$\cos a \cos b - \sin a \sin b$.

- 3e formule :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

- 4e formule :

$\sin(a+b) = \sin\big(a -$
$(-b)\big) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Méthode :

Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

Calculer : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Correction

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

II. Formules de duplication

1. Propriété

Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

2. Démonstrations

Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où $a = b$:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

On a également : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc :

$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

Et :

$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

3. Méthode

- Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Correction

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

Donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

car $\cos\frac{\pi}{8}$ est positif.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

car $\sin\frac{\pi}{8}$ est positif.

- Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos(2x) = \sin x$.

Correction

$\cos(2x) = \sin x$ soit $1 - 2\sin^2 x = \sin x$ d'après une formule de duplication.

On pose $X = \sin x$, l'équation s'écrit alors : $1 - 2X^2 = X$

Soit : $2X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

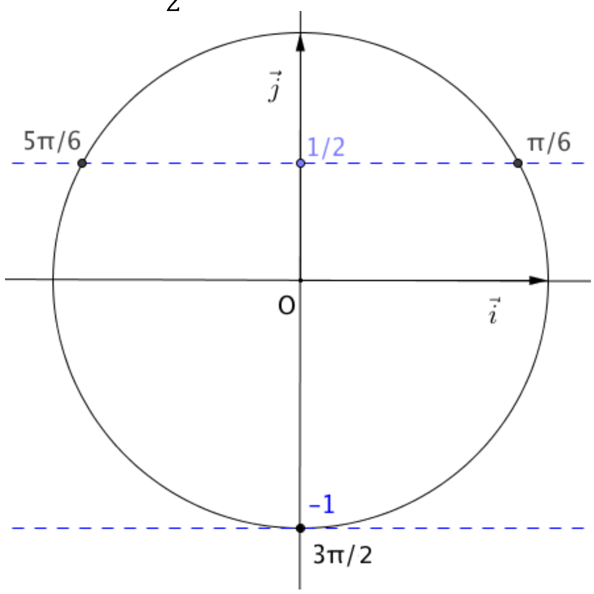
L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \qquad et \qquad X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

Résolvons alors dans $[0\,;2\pi]$ les équations : $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -1$:

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$



Ainsi :

$S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\}$

Chapitre II : Forme exponentielle d'un nombre complexe

I. Définition

1. Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

En prenant $|z| = |z'| = 1$, on a démontré dans la Partie 3 (III.) que :

$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

Soit : $f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta')$.

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : $e^{\theta}e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

2. Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque :

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

II. Propriété

$e^{i\pi} = -1$

Démonstration :

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\times 0 = -1$

Exemples :

$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\times 1 = i$$

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$.

III. Méthode :

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

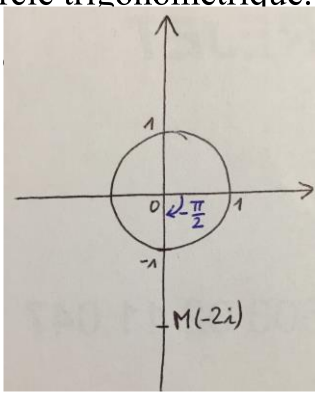
a) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Correction

1) a) - $|z_1| = |-2i| = |-2| \times |i| = 2 \times 1 = 2$

- Pour déterminer un argument de z_1, on peut utiliser le cercle trigonométrique.

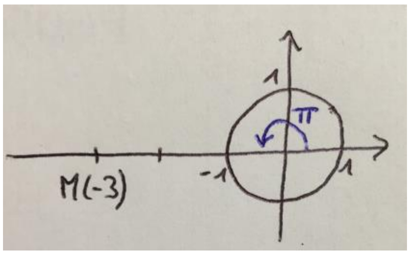
On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point M graphiquement qu'un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{2}$.



Ainsi, on a : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) - $|z_2| = |-3| = 3$

- On place le point M d'affixe z_2 et on lit graphiquement qu'un argument de z_2 est π.



Ainsi, on a : $z_2 = 3e^{i\pi}$.

c) $|z_3| = \left|\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Il n'est pas évident de déterminer graphiquement un argument de z_3. La méthode consiste alors à calculer $\frac{z_3}{|z_3|}$:

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient. Et ainsi :

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Soit :

$$z_3 = |z_3|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

2) $a)\ z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$b)\ z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

IV. Autres Propriétés

Propriétés : Pour tous réels q et q',

a) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ c) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ d) $\overline{e^{i\theta}} =$

$e^{-i\theta}$

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) iz b) $i\bar{z}$ c) $-\frac{2i}{z}$

Correction

1) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $-\frac{2i}{z} = \frac{2\times(-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

V. Formules de Moivre et d'Euler

1. Formule de Moivre :

Pour tous réels q et q', pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Que l'on peut également écrire : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Méthode :

Appliquer la formule de Moivre

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Correction

$\cos(3x) = Re\,(\cos(3x) + i\sin(3x))$

Or, selon la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x,\end{aligned}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit :

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)\end{aligned}$$

On en déduit que : $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

Or, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

2. Formules d'Euler :

Pour tous réels q et q' :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Méthode :

Appliquer les formules d'Euler

a) Linéariser (*) l'expression $\cos^3 x$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3 x$.

(*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d'expressions du type $\cos ax$ et $\sin ax$.

Correction

a) On applique une formule d'Euler :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3\right),$$

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 3x + i\sin 3x + 3\cos x + 3i\sin x + 3\cos x - 3i\sin x + \cos 3x - i\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 3x + 3\cos x + 3\cos x + \cos 3x)$$

$$= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

b) Ainsi, chercher une primitive de $\cos^3 x$ revient à chercher une primitive de $\frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

Chapitre III : Applications des nombres complexes à la géométrie

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

I. Propriété :

A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. On a :

$a)$ $AB = |b-a|$

$b)$ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$

$c)$ $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Démonstrations :

a) On considère un point E, d'affixe e tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

Alors : $|b-a| = |e-0| = OE$

Comme $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$, $OE = AB$ donc $|b-a| = AB$.

b) E a pour affixe $e = b-a$.

Donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}) = \arg(b-a)$ et donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$.

c) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC})$

$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$

$= \arg(c-a) - \arg(b-a)$

$= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

II. Méthode :

1. Utiliser les nombres complexes en géométrie

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Correction

1) $AB = |z_B - z_A| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Donc $AB = AC$.

2) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+3i}{3-i}$$

$$= \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{3 + i + 9i - 3}{9+1}$$

$$= \frac{10i}{10} = i$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

2. Déterminer un ensemble de points

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

a) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.

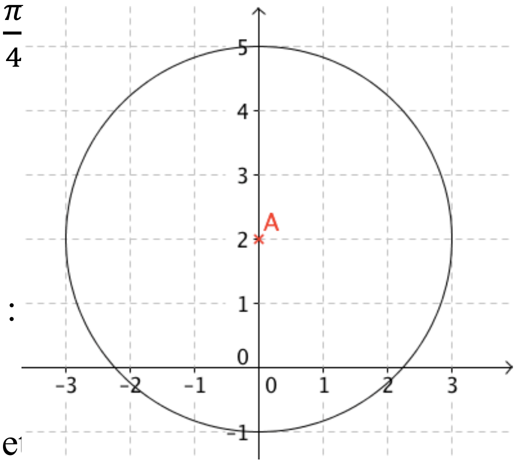
b) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.

c) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.

d) L'ensemble des points M tels que $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$.

e) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

f) L'ensemble des points M tels que $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$



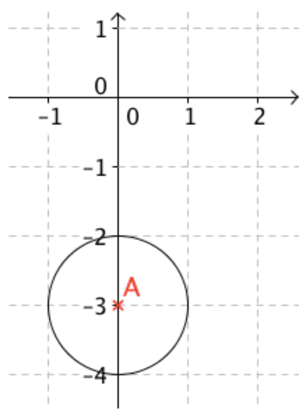
Correction

a) Soit A le point d'affixe $2i$ alors $|z - 2i| = 3$ s'écrit :

$AM = 3$. En effet : $|z - 2i| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ e

de rayon 3.



b) $|iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i| \times |z + 3i| = |z - (-3i)|$

Soit A le point d'affixe $-3i$ alors $|iz - 3| = 1$ s'écrit $AM = 1$.

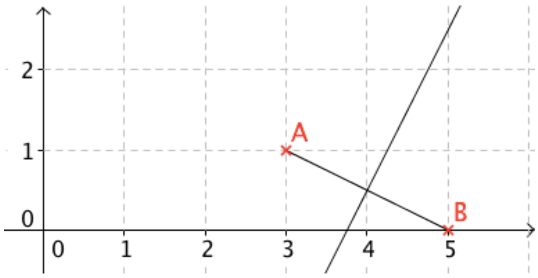
En effet : $|z - (-3i)| = AM$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1.

c) $|\bar{z}-3+i| = |\overline{\bar{z}-3+i}| = |\bar{\bar{z}}-3-i| = |z-3-i| = |z-(3+i)|$

Soit A le point d'affixe $3+i$ et B le point d'affixe 5 alors $|\bar{z}-3+i| = |z-5|$ s'écrit $AM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.



d) $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$.

Soit $|z-i| = 2|z|$, en notant que $z \neq 0$.

Soit encore : $|z-i|^2 = 4|z|^2$

On pose $z = x+iy$, alors l'équation s'écrit :

$|x+iy-i|^2 = 4|x+iy|^2$

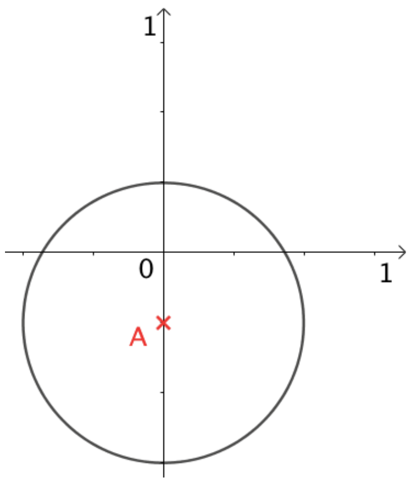
$|x+i(y-1)|^2 = 4|x+iy|^2$

$x^2+(y-1)^2 = 4(x^2+y^2)$

$x^2+y^2-2y+1 = 4x^2+4y^2$

$3x^2+3y^2+2y = 1$

$x^2+y^2+\frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$

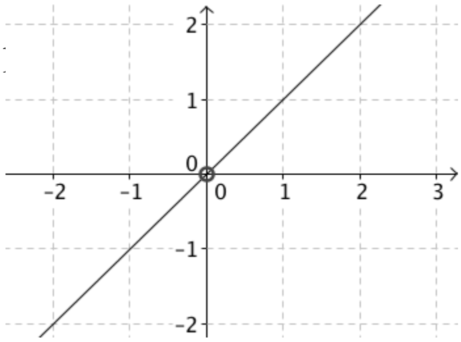


$$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $A\left(0\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

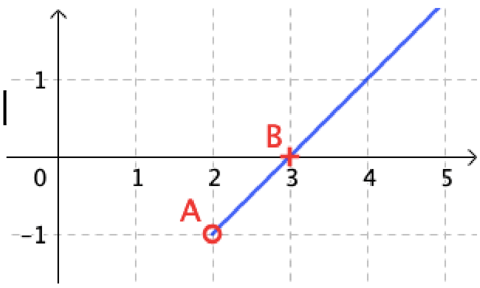
e) L'ensemble des points M est la 1ère bissectrice de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées privée de l'origine.



f) $\arg(z - 2 + i) = \arg\big(z - (2 - i)\big)$.

Soit A le point d'affixe $2 - i$ alors $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

En effet, $\arg\big(z - (2 - i)\big) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.



L'ensemble des points M est la demi-droite d'origine A privée de A et passant par le point $B(3)$.

Partie 2 : Racine n-ième de l'unité

1) Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

On cherche à déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'égalité $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Racine n-ième de l'unité

1. Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

a) Définition

Une **racine n-ième de l'unité** est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Théorème :

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement n racines :

$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$.

Démonstration :

Existence :

Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0\,; 2\pi[$.

Soit : $z^n = 1$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1$

$e^{in\theta} = 1$

$n\theta = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut ainsi restreindre les valeurs prisent par k à l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n - 1$.

Donc $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$, est une racine de l'unité.

Unicité :

Supposons qu'il existe k' entier compris entre 0 et $n-1$, tel que $w_k = w_{k'}$.

Alors : $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$

$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$, avec $l \in \mathbb{Z}$.

$2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$

$k = k' + ln$

$k - k' = ln$

Donc n divise $k - k'$.

Or $k - k'$ est un entier compris entre 0 et $n-1$. Donc n ne peut pas diviser $k - k'$.

Et donc $l = 0$. Soit $k = k'$.

c) Méthode

Résoudre une équation en utilisant les racines de l'unité

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $(z-1)^3 = 1$ b) $z^5 = -1$

Correction

a) $(z-1)^3 = 1$

$z - 1$ est une racine 3-ième de l'unité.

On a : $z - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, avec k entier compris entre 0 et 2.

Soit : $z - 1 = 1$ ou $z - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z - 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Soit : $z = 2$ ou $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = 1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$S = \left\{2\,; 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\ 1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

b) $z^5 = -1$

$z^5 = (-1)^5$

$$\left(\frac{z}{-1}\right)^5 = 1$$

$$(-z)^5 = 1$$

$-z$ est une racine 5-ième de l'unité.

On a : $-z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, avec k entier compris entre 0 et 4.

Soit : $-z = 1$ ou $-z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

Soit : $z = -1$ ou $z = -e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

Soit : $z = -1$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

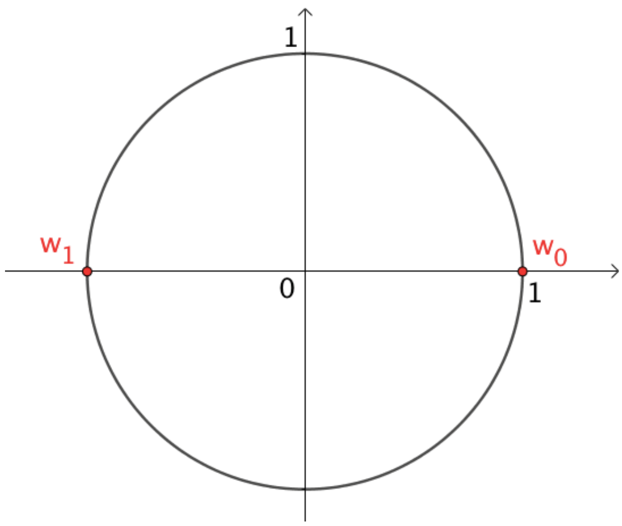
Soit : $z = -1$ ou $z = e^{i\frac{7\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{9\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{11\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{13\pi}{5}}$.

Soit : $z = -1$ ou $z = e^{i\frac{7\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{9\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{11\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{13\pi}{5}}$.

$$S = \left\{-1\,; e^{-i\frac{3\pi}{5}}\,;\, e^{-i\frac{\pi}{5}}\,;\, e^{i\frac{\pi}{5}}\,;\, e^{i\frac{3\pi}{5}}\right\}.$$

2. Représentation géométrique

a) Cas $n = 2$:



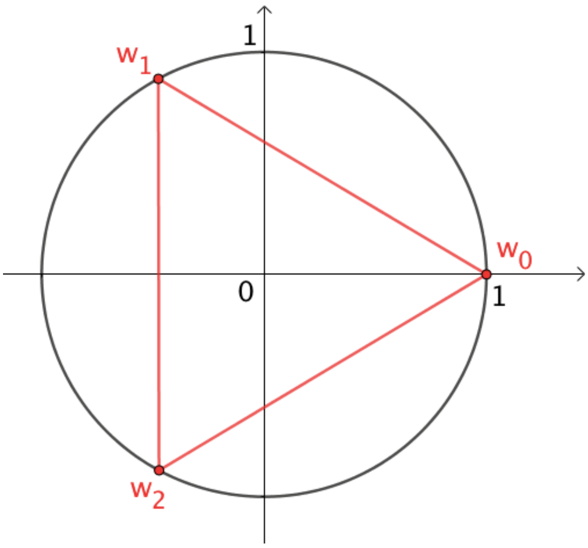
Si on applique le théorème ci-dessus, les racines de l'équation $z^2 = 1$ sont :

$$w_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{2}} = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

On peut ainsi représenter les racines 2-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines n-ième de l'unité ont pour module 1.

b) Cas $n = 3$:



Les racines de l'équation $z^3 = 1$ sont :

$w_0 = e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{3}} = e^{i0} = 1,\ w_1 = e^{i\frac{2\times 1\times\pi}{3}} =$
$e^{\frac{2i\pi}{3}}$,

$w_2 = e^{i\frac{2\times 2\times\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

On peut ainsi représenter les racines 3-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.

Par convention, on note habituellement :

$j = w_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = w_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

L'ensemble des points dont les images sont les racines 3-ième de l'unité forment un triangle équilatéral.

c) Cas $n = 4$:

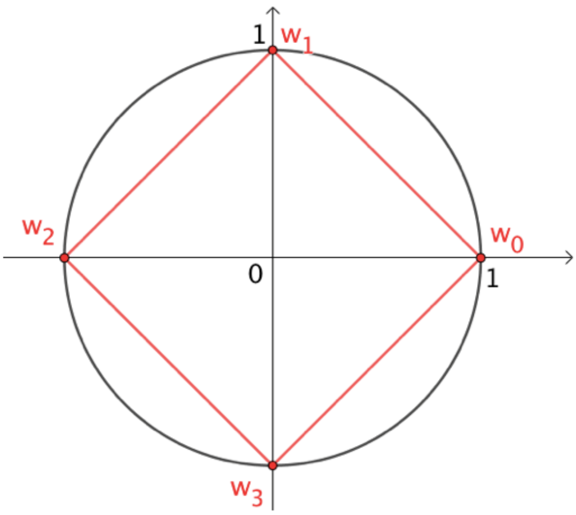
Les racines de l'équation $z^4 = 1$ sont :

$w_0 = e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{4}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2\times 1\times\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, w_2 = e^{i\frac{2\times 2\times\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1,$

$w_3 = e^{i\frac{2\times 3\times\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

On peut ainsi représenter les racines 4-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.

L'ensemble des points dont les images sont les racines 4-ième de l'unité forment un carré.



De façon générale, l'ensemble des points dont les images sont les racines n-ième de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.

3. Méthode

Utiliser les racines de l'unité

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10\sin\frac{\pi}{5}$.

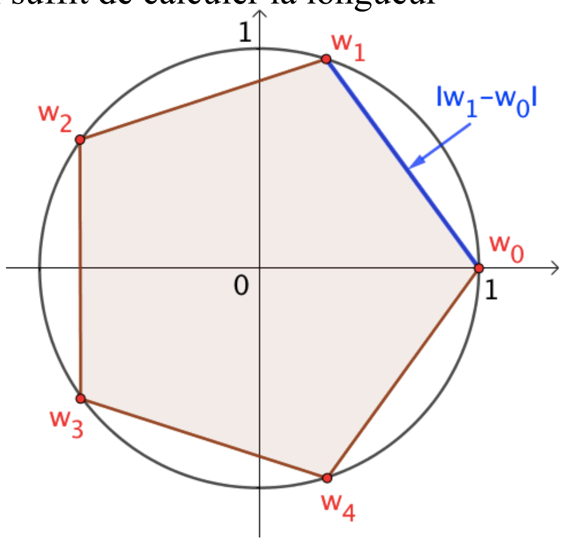
Correction

Les images des racines 5-ième de l'unité forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Ainsi pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d'un côté du pentagone.

Soit par exemple :

$$|w_1 - w_0| = \left|e^{i\frac{2\times 1\times\pi}{5}} - 1\right|$$
$$= \left|e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right|$$



$$= \left|e^{i\frac{2\pi}{10}}\right| \times \left|e^{i\frac{2\pi}{10}} - e^{-i\frac{2\pi}{10}}\right|$$

$$= \left|e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}}\right|$$

Soit, en appliquant une formule d'Euler :

$$|w_1 - w_0| = \left|2i \times \sin\frac{\pi}{5}\right| = 2\sin\frac{\pi}{5}$$

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à $10\sin\frac{\pi}{5}$.