NOMBRE COMPLEXE : L'ensemble ℂ

Table des matières

Première partie :
L'ensemble $\mathbb{C}$

Chapitre I : Généralité

I. Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.

- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.

- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels.

Exemples :

$3 + 4i$; $-2 - i$; $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes. Et les nombres réels 0, -2 ou $\sqrt{3}$ sont également des nombres complexes !

II. Vocabulaire :

- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire.** On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

Remarques :

- Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.

- Si $a = 0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

III. Méthode

Effectuer des calculs sur les nombres complexes

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad$ $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad$ $z_3 = (2 - 3i)^2$

Correction

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$
$$= 3 - 5i - 3i + 4$$
$$= 7 - 8i$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$
$$= -3 + 15i + 2i - 10i^2$$
$$= -3 + 15i + 2i + 10$$
$$= 7 + 17i$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$
$$= 4 - 12i + 9i^2$$
$$= 4 - 12i - 9$$
$$= -5 - 12i$$

IV. Propriétés :

- Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration :

Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Chapitre II : Conjugué d'un nombre complexe

I. Définition :

Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

Exemples :

- $z = 4 + 5i$ et $\bar{z} = 4 - 5i$

- On peut également noter :

$\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$; $\bar{i} = -i$; $\bar{5} = 5$

II. Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

d) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$

Démonstrations:

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.

a) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$

$$= \overline{a + a' + i(b + b')}$$

$$= a + a' - i(b + b')$$

$$= a - ib + a' - ib'$$

$$= \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'}$$

$= \bar{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \overline{(a + \imath b) \times (a' + \imath b')}$ $\qquad$ $\bar{z} \times \overline{z'} = \left(\overline{a + \imath b}\right) \times \left(\overline{a' + \imath b'}\right)$

$= \overline{aa' + \imath ab' + \imath ba' + \imath^2 bb'}$ $\qquad$ $= (a - ib) \times (a' - ib')$

$= \overline{aa' - bb' + \imath(ab' + ba')}$

$= aa' - iab' - iba' + i^2 bb'$

$= aa' - bb' - i(ab' + ba')$ $\qquad$ $= aa' - bb' - i(ab' + ba')$

Donc : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

d) On procède par récurrence.

- <u>Initialisation pour $n = 2$:</u> $\overline{z^2} = \overline{z \times z} = \bar{z} \times \bar{z} = \bar{z}^{\,2}$, d'après la propriété c.
- Hérédité :

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $\overline{z^k} = \bar{z}^{\,k}$.

  - <u>Démontrons que :</u> La propriété est vraie au rang $k + 1$: $\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{\,k+1}$.

  $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z}$

  $= \overline{z^k} \times \bar{z}$, d'après la propriété c.

  $= \bar{z}^k \times \bar{z}$, par hypothèse de récurrence.

  $= \bar{z}^{\,k+1}$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $\overline{z^n} = \bar{z}^{\,n}$.

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+\imath b}\right)} = \overline{\left(\frac{a-\imath b}{(a+\imath b)(a-\imath b)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-\imath b}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\imath}$

$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} i$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} i$

Donc : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Propriétés :

a) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstrations :

$z = \bar{z}$

$\Leftrightarrow a + ib = a - ib$

$\Leftrightarrow 2ib = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

$z = -\bar{z}$

$\Leftrightarrow a + ib = -a + ib$

$\Leftrightarrow 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

<u>Propriété :</u> Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

III. Méthode

1. Déterminer un conjugué

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2 - i)(i - 5) \qquad z_2 = \frac{3 + 2i}{i}$$

Correction

$\bar{z}_1 = \overline{(2-\imath)(\imath-5)}$

$= \overline{(2-\imath)} \times \overline{(\imath-5)}$

$= (2+i)(-i-5)$

$= -2i - 10 - i^2 - 5i$

$= -2i - 10 + 1 - 5i$

$= -9 - 7i$

$z_2 = \overline{\left(\frac{3+2\imath}{\imath}\right)}$

$= \frac{\overline{3+2\imath}}{\bar{\imath}}$

$= \frac{3-2i}{-i}$

$= \frac{(3-2i)i}{-i^2}$

$= \frac{(3-2i)i}{1}$

$= 2+3i$

2. Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $3z - 6 = 4i + z$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$

Correction

a) $3z - 6 = 4i + z$

$3z - z = 6 + 4i$

$2z = 6 + 4i$

$z = 3 + 2i$

b) On pose : $z = a + ib$. L'équation s'écrit alors :

$3(a+ib) - 2 = a - ib + 1$

$3a + 3ib - 2 - a + ib - 1 = 0$

$2a - 3 + 4ib = 0$

Donc : $2a - 3 = 0$ et $4b = 0$

Soit : $a = \frac{3}{2}$ et $b = 0$

D'où : $z = \frac{3}{2}$

Chapitre III : Formule du binôme de Newton

I. Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

<u>**Remarque :**</u> Les coefficients $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$ s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

On procède par récurrence.

- <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$: $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$
- Hérédité :

    - Hypothèse de récurrence :

    Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie :

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \binom{k}{2} a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

- <u>Démontrons que :</u> La propriété est vraie au rang $k+1$:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

$$= (a+b)\left(\binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \binom{k}{2} a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k\right)$$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} ab^k$$

$$+ \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right] a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right] a^{k-1} b^2 + \cdots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right] ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

Or, $\binom{k}{0} = 1$ et $\binom{k}{k} = 1$

Donc :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right] a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right] a^{k-1} b^2 + \cdots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right] ab^k + b^{k+1}$$

Et, d'après la formule de Pascal, on a :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} ab^k + b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

Car $\binom{k+1}{0} = 1$ et $\binom{k+1}{k+1} = 1$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

II. Méthode

Appliquer la formule du binôme

Développer l'expression $(z+5)^6$.

Correction

$(z+5)^6 = \binom{6}{0} z^6 + \binom{6}{1} z^5 \times 5 + \binom{6}{2} z^4 \times 5^2 + \binom{6}{3} z^3 \times 5^3 + \binom{6}{4} z^2 \times 5^4 + \binom{6}{5} z \times 5^5 + \binom{6}{6} 5^6$

On construit un triangle de Pascal :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.

$(z+5)^6$

$= 1z^6 + 6z^5 \times 5 + 15z^4 \times 5^2 + 20z^3 \times 5^3 + 15z^2 \times 5^4 + 6z \times 5^5 + 1 \times 5^6$

Soit : $(z+5)^6 = z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2500z^3 + 9375z^2 + 18750z + 15625$