PROBABILITE ET DENOMBREMENT : Loi binomiale

Table des matières

Partie 2 : Loi binomiale

Chapitre 1 : Rappels sur les probabilités conditionnelles

I. Propriétés

• $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

• $P(A) = P(B \cap A) + P(\bar{B} \cap A)$ (Formule des probabilités totales)

• A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou $P_A(B) = P(B)$

II. Méthode

Appliquer la formule des probabilités totales

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

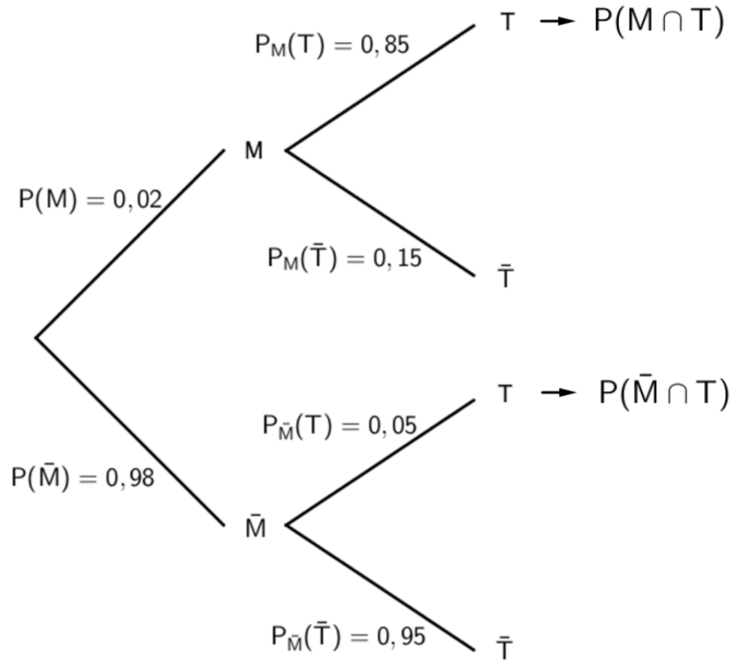
a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Correction

a) On construit un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$\quad = 0{,}02 \times 0{,}85 + 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}066.$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6 %.

b) $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}85}{0{,}066} \approx 0{,}26.$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26 %.

Chapitre II : Successions d'épreuves indépendantes

Exemple :

On lance un dé puis une pièce de 1 € et on note à chaque fois le résultat.

Le résultat du lancer du dé n'influe pas sur le résultat du lancer de la pièce. On dit que ces deux épreuves sont indépendantes.

L'univers de la première épreuve est $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et celui de la deuxième épreuve est $\{P\,;F\}$.

Les issues de l'expérience aléatoire sont

$(1\,;P), (1\,;F), (2\,;P), (2\,;F), \dots , (6\,;P), (6\,;F)$.

I. Définition

Deux épreuves qui se succèdent sont **indépendantes**, si l'issue de la première épreuve n'influe pas sur l'issue de la deuxième épreuve.

II. Propriété

On considère deux épreuves indépendantes.

La probabilité d'obtenir l'issue A pour la première épreuve suivie de l'issue B pour la deuxième épreuve est : $P(A\,;B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : Cette propriété se généralise dans le cas de n épreuves indépendantes.

III. Méthode

Calculer des probabilités sur une succession d'épreuves indépendantes

On considère deux urnes contenant des billets indiscernables au touché.

La 1re urne contient 10 billets dont 8 de billets de 5 € et 2 billets de 10 €.

La 2e urne contient 12 billets dont 6 de billets de 10 € et 6 billets de 20 €.

On tire un billet de la 1re urne puis un billet de la 2e urne.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité de gagner au moins 25 €.

Correction

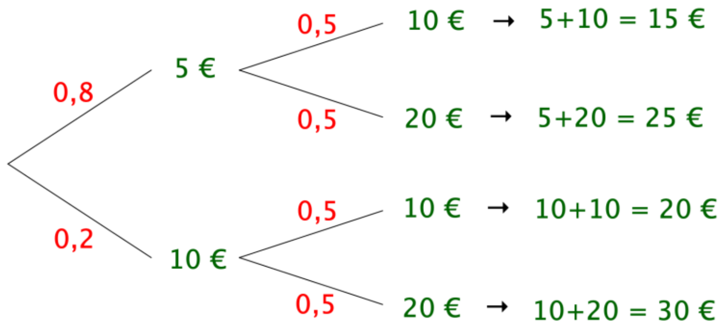
a) Pour la 1re urne, on a :

$P_1(5\text{ €}) = 0{,}8$ et $P_1(10\text{ €}) = 0{,}2$

Pour la 2e urne, on a :

$P_2(10\text{ €}) = 0{,}5$ et $P_2(20\text{ €}) = 0{,}5$

On présente ces résultats dans un arbre pondéré :



b) Les deux épreuves sont indépendantes donc par exemple :

$P(5\text{ €}\,;20\text{ €}) = P_1(5\text{ €}) \times P_2(20\text{ €}) = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4.$

la probabilité de gagner au moins 25 € est donc égale à :

$P(5\text{ €}\,;20\text{ €}) + P(10\text{ €}\,;20\text{ €}) = 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$

La probabilité de gagner au moins 25 € est de 50 %.

Chapitre III : Épreuve de Bernoulli

I. Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face".
2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.

p est le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemples : Dans les exemples présentés plus haut :

$$1)\ p = \frac{1}{2} \qquad\qquad 2)\ p = \frac{1}{6}$$

II. Convention

Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.

Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1-p$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors : $E(X) = p$ $V(X) = p(1-p)$

Démonstrations :

- $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0)$
$= 1 \times p + 0 \times (1-p)$
$= p$
- $V(X) = (1 - E(X))^2 \times P(X = 1) + (0 - E(X))^2 \times P(X = 0)$
$= (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p)$
$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3$
$= p - p^2$
$= p(1-p)$

Chapitre IV : Schéma de Bernoulli, loi binomiale

I. Schéma de Bernoulli

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Remarque : Pour la répétition de n épreuves de Bernoulli, l'univers est $\{0, 1\}^n$.

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

II. Loi binomiale

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Une **loi binomiale** est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; … ; n\}$ qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n ; p)$.

Méthode : Utiliser un arbre pondéré avec la loi binomiale

On considère un jeu de 4 cartes dont une carte est un as.

On tire trois fois de suite une carte en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu.

On considère comme succès l'évènement « Obtenir un as ».

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Calculer $P(X = 2)$ en utilisant un arbre pondéré.

Correction

On répète 3 fois de suite des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

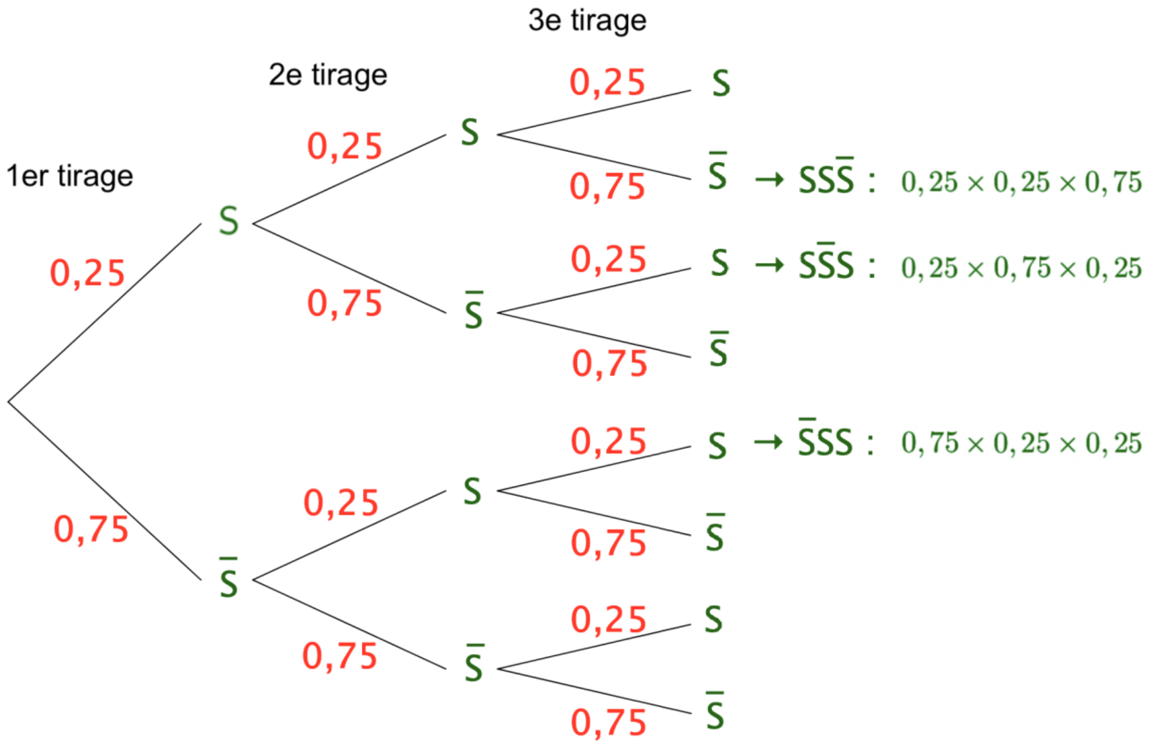
Pour chaque expérience la probabilité du succès (tirer un as) est égale à $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Donc la probabilité d'un échec est égale à 0,75.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}25$.

On cherche à calculer la probabilité d'obtenir 2 succès parmi 3 tirages.

On construit alors un arbre pondéré présentant les données de l'énoncé :



On compte 3 triplets formés de deux succès : $(S\,;\,S\,;\bar{S})$, $(S\,;\,\bar{S}\,;\,S)$ et $(\bar{S}\,;\,S\,;\,S)$.

Et on a : $P(S\,;\,S\,;\bar{S}) = P(S\,;\,\bar{S}\,;\,S) = P(\bar{S}\,;\,S\,;\,S) = 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}25^2 \times 0{,}75$.

Et donc $P(X = 2) = 3 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75 = 0{,}140625$.

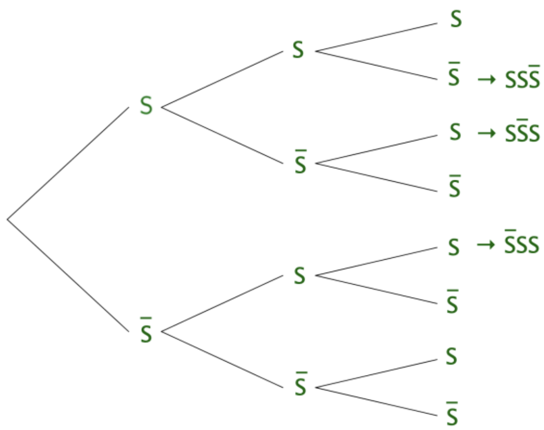
III. Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Exemple :

On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.

Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ?

On compte le nombre de combinaisons de 2 succès parmi 3, soit : $\binom{3}{2} = 3$.



Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$

On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n**, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration :

Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n-k$ échecs (de probabilité $1-p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.

Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$.

Donc : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

a) Justifier que X suit une loi binomiale.

b) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

Correction

a) On répète 4 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve à deux issues :

boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).

Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres : $n=4$ et $p=\frac{5}{12}$.

b) Nombre de

Probabilit

Probabilités

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(1-\frac{5}{12}\right)^{4-3}$$

$$= \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(\frac{7}{12}\right)^{1}$$

$$= 4 \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{875}{5184} \approx 0{,}17.$$

La loi binomiale avec la calculatrice :

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.

a) Déterminer des réels a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$

b) Donner une interprétation du résultat précédent.

Correction

a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0{,}55$.

Avec le tableur, il est possible d'obtenir la loi de probabilité de X.

Avec la loi binomiale $B(50 ; 0{,}55)$:

Pour calculer $P(X = 20)$, il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;0)

Pour calculer $P(X \leq 20)$, il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;1)

C2 =LOI.BINOMIALE(A2;50;0,55;1)

	A	B	C	D	E
1	k	P(X=k)	P(X<=k)		
2	0	4,6E-018	4,6E-018		
3	1	2,8E-016	2,8E-016		
4	2	8,4E-015	8,7E-015		
5	3	1,6E-013	1,7E-013		
6	4	2,4E-012	2,5E-012		

… … …

On obtient ainsi :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$P(X = k)$	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,034	0,05	0,069	0,087	0,102	0,112

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$P(X = k)$	0,112	0,104	0,089	0,07	0,051	,034	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001

Pour $k < 17$ et $k > 38$, les probabilités sont inférieures à 10^{-3} et peuvent être considérées comme négligeables.

On obtient également le tableau des probabilités cumulées :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$P(X = k)$	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$P(X = k)$	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

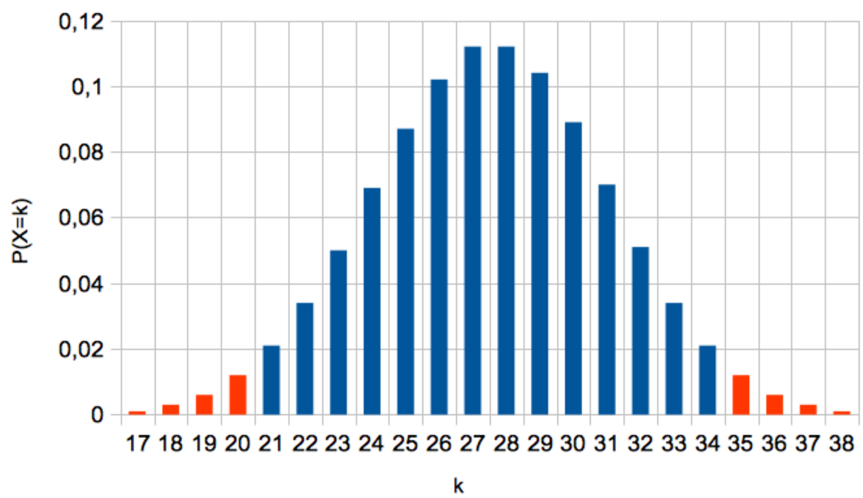
On cherche a et b tel que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.

On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$.

On lit : $a = 21$.

On détermine ensuite b, le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

On lit : $b = 34$.



Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0{,}95$

b) Or, $\frac{21}{50}$ = 42 % et $\frac{34}{50}$ = 68 %.

Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

A noter : L'intervalle [0,42 ; 0,68] s'appelle **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.

Chapitre IV : Variable aléatoires

I. Somme de variables aléatoires

Exemple :

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.

- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs –2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.

Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.

Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs :

-1, 0, 4, 5 et 6.

En effet, on a par exemple $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on cherche toutes les sommes $X + Y$ égales à 5.

On a ainsi : $P(X + Y = 5) = P\big((X = 1) \cap (Y = 4)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$

Si de plus, les évènements X et Y sont indépendants, alors on a :

$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \times P(Y = 4) + P(X = 2) \times P(Y = 3)$$

1. Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$

Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k} P(X=i)\times P(Y=j)$$

On dit dans ce cas que les variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont indépendantes.

Remarque : Le symbole Σ

Si par exemple, $k=2$ alors :

$$P(X+Y=2)=\sum_{i+j=2} P((X=i)\cap(Y=j))$$

$$=P((X=0)\cap(Y=2))+P((X=1)\cap(Y=1))+P((X=2)\cap(Y=0))$$

2. Méthode : Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €.

Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.

La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2e partie.

On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S=X+Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Correction

Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :

$Y \backslash X$	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

Ainsi, on a :

$P(S=-4)=P((X=1)\cap(Y=-5))$

$=P(X=1)\times P(Y=-5)$ en effet, les variables X et Y sont indépendantes.

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$P(S=-3)=P(X=2)\times P(Y=-5)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$P(S=2)=P(X=1)\times P(Y=1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(S=3)=P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=2)\times P(Y=1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

$P(S=4)=P(X=2)\times P(Y=2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	–4	–3	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

II. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

1. Propriétés :

- $E(aX+b) = aE(X)+b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

2. Méthode

Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Correction

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.

La loi de probabilité de Y est alors :

y_i	–2	–1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :

$E(Y) = -2 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}1$

$$V(Y) = 0{,}2 \times (-2 - 0{,}1)^2 + 0{,}1 \times (-1 - 0{,}1)^2 + 0{,}2 \times (0 - 0{,}1)^2 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}1)^2 + 0{,}1 \times (2 - 0{,}1)^2$$

$$= 1{,}69$$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :

$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000E(X) - 1300$

Donc : $E(X) = \frac{E(Y)+1300}{1000} = \frac{0{,}1+1300}{1000} = 1{,}3001$

$V(Y) = V(1000X - 1300) = 10002\,V(X)$

Donc : $V(X) = \frac{V(Y)}{1000^2} = \frac{1{,}69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1{,}69}{1000^2}} = \frac{1{,}3}{1000} = 0{,}0013$

Conclusion : $E(X) = 1{,}3001\ cm$ et $\sigma(X) = 0{,}0013\ cm$.

Chapitre V : Application à la loi binomiale

I. Échantillon d'une loi de probabilité

Exemple :

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.

Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.

Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.

On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

II. Définition

Un **échantillon de taille n d'une loi de probabilité** est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

III. Propriétés

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :

1) $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

2) $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

IV. Méthode

Calculer une espérance et une variance à l'aide d'une somme de variables aléatoires

Sur un axe gradué, on dépose une petite goûte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10.

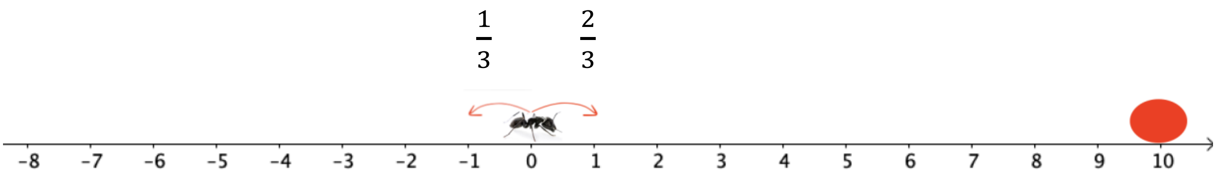
Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué.

Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.

On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au k-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.

On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme des X_k.



1) Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$

2) En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

Correction

1) On établit la loi de probabilité de X_k :

x_i	-1	1
$P(X_k = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$E(X_k) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$V(X_k) = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

2) On a : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Donc la variable aléatoire S_n donne l'abscisse de la fourmi après n déplacements.

Et on a : $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

$= nE(X_k)$

$= \frac{n}{3}$

Et : $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$, car les variables sont indépendantes.

$= nV(X_k)$

$= \frac{8n}{9}$

3) $E(S_n) = 10$

$\frac{n}{3} = 10$

$n = 30$

Après 30 déplacements, Sophie peut espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture.

$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{\frac{8\times30}{9}} \approx 5{,}2$ unités.

V. Échantillon de la loi de Bernoulli

Propriété : Soit $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.

La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple :

En reprenant l'exemple donné au début de la partie 3.1, la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}998$.

VI. Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Propriété : Soit S une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$E(S) = np \qquad V(S) = np(1-p) \qquad \sigma(S) = \sqrt{V(S)}$

Soit $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.

On rappelle que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, on a :

$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Donc, on a :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np$$

$V(S) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ car $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont indépendants.

Donc : $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots = p(1-p) = np(1-p)$

1. Méthode

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour une loi binomiale

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire S donnant le nombre de succès.

Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

Correction

La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

$$E(S) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$$

$$V(S) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

En moyenne, on peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.