Thème : Electricité
Fiche 5 : Dipôle RC et dipôle RL

Plan de la fiche

I - Définitions

• **Courant électrique :** déplacement de charges électriques q. La mesure du débit de charges donne l'intensité du courant :
- dans le cas d'un courant continu (intensité constante du courant au cours du temps), l'intensité est définie par : $I = Q / \Delta t$ où Q est la charge ayant traversé une portion du circuit pendant la durée Δt ;
- dans le cas d'un courant variable (intensité non constante du courant au cours du temps), l'intensité est définie par : $i = dq / dt$ où dq est la charge électrique circulant dans le circuit pendant une durée dt.

• **Orientation d'un circuit :** choix du sens d'orientation du courant électrique pour lequel l'intensité est > 0. Le sens d'orientation est matérialisé par une flèche. L'intensité est une grandeur algébrique ; le branchement d'un ampèremètre oriente de fait le circuit : entrée par la borne A de l'ampèremètre et sortie par la COM de l'ampèremètre. Si l'ampèremètre affiche une valeur > 0, l'orientation du circuit est correcte ; dans le cas contraire, il faut inverser le sens d'orientation.

• **Tension électrique entre les deux bornes A et B d'un dipôle :** différence de potentiel électrique $(V_A - V_B)$ entre ces deux points. La tension est une grandeur algébrique : $U_{AB} = -U_{BA}$. Elle est représentée par une flèche.

• **Convention récepteur :** la flèche précisant l'orientation du dipôle de A vers B est en sens contraire de la flèche utilisée pour représenter la tension U_{AB}.

• **Sens conventionnel du courant :** sens de la borne + du générateur vers la borne – du générateur à l'extérieur du circuit. Le sens conventionnel du courant est de sens contraire à celui du déplacement des électrons.

• **Condensateur :** composant constitué de deux surfaces conductrices (armatures) séparées par un isolant diélectrique. Un condensateur se caractérise par une grandeur C nommée capacité dont l'unité est le Farad, de symbole F.

• **Bobine :** composant constitué d'un fil conducteur entouré d'une gaine. Une bobine se caractérise par deux grandeurs :
- l'inductance L dont l'unité est le Henry, de symbole H ;
- la résistance r du fil conducteur dont l'unité est l'Ohm, de symbole Ω.

• **Dipôle RC :** association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.

• **Dipôle RL :** association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine d'inductance L et de résistance r.

• **Echelon de tension :** variation brutale de la tension appliquée à un dipôle (dipôle RC ou dipôle RL).

• **Charge d'un dipôle RC :** phénomène correspondant à un régime transitoire au cours duquel les tensions aux bornes du conducteur ohmique et du condensateur augmentent progressivement. La charge d'un condensateur nécessite le branchement du condensateur à un générateur de tension E. Le générateur extrait les électrons libres d'une armature et les fait circuler vers l'autre armature : il y a déplacement de charges. Comme les charges ne peuvent pas traverser le condensateur, elles s'accumulent sur les armatures.
L'armature A du condensateur perd des électrons et présente une charge électrique $q_A > 0$.
L'armature B du condensateur capte des électrons et présente une charge $q_B < 0$ telle que, à tout instant :
$q_A = -q_B = q$.
Au cours de la charge, q et U_{AB} augmentent proportionnellement selon la relation : $q = C.\ U_{AB}$.
La fin de la charge correspond à un régime permanent (ou régime établi ou régime asymptotique) où q et U_{AB} atteignent des valeurs maximales ($q_{MAX} = C.E$; $U_{AB_{MAX}} = E$) et $i = 0$.

• **Décharge d'un dipôle RC :** phénomène correspondant à un régime transitoire au cours duquel les tensions aux bornes du conducteur ohmique et du condensateur diminuent progressivement. Le condensateur n'est plus connecté au générateur. Les électrons accumulés sur l'armature négative B lors de la charge du condensateur se déplacent vers l'armature positive A.
Au cours de la décharge, q et U_{AB} diminuent proportionnellement selon la relation : $q = C.\ U_{AB}$.
La fin de la décharge correspond à un régime permanent (ou régime établi ou régime asymptotique) où q et U_{AB} atteignent des valeurs minimales ($q_{MIN} = 0$ et $U_{AB\,MIN} = 0$) et $I_{MAX} = -E / R$.

• **Etablissement du courant dans un dipôle RL :** phénomène correspondant à un régime transitoire au cours duquel l'intensité du courant dans le circuit augmente progressivement. Tout se passe comme si la bobine s'opposait à l'établissement du courant.
La fin de l'établissement du courant correspond au régime permanent (ou régime établi ou régime asymptotique) : l'intensité est constante ($i = cte \neq 0$) et la bobine se comporte alors comme un conducteur ohmique.

• **Suppression du courant dans un dipôle RL :** phénomène correspondant à un régime transitoire au cours duquel l'intensité du courant dans le circuit diminue progressivement. Tout se passe comme si la bobine s'opposait à la suppression du courant.
La fin de la suppression du courant correspond au régime permanent (ou régime établi ou régime asymptotique) où $i = 0$.

• **Constante de temps (ou temps caractéristique) d'un dipôle RC :** grandeur homogène à un temps, définie par $\tau = R.C$ et caractérisant la rapidité de charge (ou de décharge) d'un condensateur à travers un conducteur ohmique.
τ correspond à la durée nécessaire pour charger un condensateur à 63 % de sa valeur maximale ou pour décharger un condensateur à 37 % de sa valeur maximale (voir méthodologie ci-après).
Au bout de $5\ \tau$, la tension u aux bornes du condensateur est égale :
- lors de la charge, à 99 % de sa valeur maximale ;
- lors de la décharge, à 1 % de sa valeur maximale.
On considère au bout d'un temps $t = 7\ \tau$ que le condensateur est chargé (ou déchargé).

• **Constante de temps (ou temps caractéristique) d'un dipôle RL :** grandeur homogène à un temps, définie par $\tau = L / R_{TOTALE}$ et caractérisant la rapidité d'établissement (ou de suppression) du courant dans la bobine.
τ correspond à la durée nécessaire pour que l'intensité prenne une valeur égale à 63 % de sa valeur finale lors de l'établissement du courant ou une valeur égale à 37 % de sa valeur initiale lors de la suppression du courant.
Au bout de $5\ \tau$, l'intensité du courant est égale :
- lors de l'établissement du courant, à 99 % de sa valeur maximale ;
- lors de la suppression du courant, à 1 % de sa valeur maximale.
On considère au bout d'un temps $t = 7\ \tau$ que le courant est établi (ou supprimé).

II - Règle

Propriétés

• **Propriété n°1**
Un condensateur chargé est un réservoir d'énergie : il restitue de l'énergie lorsqu'il se décharge.
Un condensateur est un interrupteur ouvert, stockeur de charges.

• **Propriété n°2**
Une bobine emmagasine de l'énergie mais ne peut pas restituer en différé (comme le condensateur) l'énergie stockée. En régime permanent, une bobine est un interrupteur fermé.

• **Propriété n°3**
Dans un dipôle RC, la charge q d'un condensateur et la tension u_{AB} aux bornes du condensateur ne sont jamais discontinues.
Par contre, l'intensité i du courant subit une discontinuité.

• **Propriété n°4**
Dans un dipôle RL, lors de l'établissement ou de la suppression du courant, l'intensité i du courant n'est jamais discontinue.
Par contre, la tension u_{AB} aux bornes de la bobine subit une discontinuité.

• **Propriété n°5**
La loi des nœuds et la loi d'additivité des tensions s'appliquent également lorsque les circuits sont parcourus par des courants variables.

• **Propriété n°6**
La tension aux bornes d'un condensateur est définie par : $u_{AB} = q / C$.
L'armature A porte la charge q ; l'armature B porte la charge (– q).

• **Propriété n°7**
La tension aux bornes d'une bobine est définie par : $u_{AB} = r\,i + L\,(di / dt)$.

• **Propriété n°8**
L'équation différentielle de la tension u_C aux bornes d'un condensateur lors de la charge de ce condensateur à travers une résistance R en réponse à un échelon de tension s'établit comme suit :
$E = u_R + u_C$ (application de la loi d'additivité des tensions).
Or : $u_R = R\,i$ (loi d'Ohm) et $i = dq / dt$.
Ce qui conduit à : $i = C\,(du_C / dt)$.
Soit l'équation différentielle de la tension u_C lors de la charge :
$E = u_C + [RC \times (du_C / dt)]$ ou, en posant $\tau = RC$: $E = u_C + [\tau \times (du_C / dt)]$.
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :
$u_C = Ae^{-t/\tau} + B$ où A et B sont des constantes qui se déterminent à partir des conditions initiales : $u_C(0) = 0$.
Soit : $A + B = 0$ conduisant à $A = -B$.
D'où : $u_C = B\left(e^{-t/\tau} + 1\right)$ et $\left(du_C / dt\right) = (B/\tau)\,e^{-t/\tau}$
L'équation différentielle s'écrit : $E = B\left(-e^{-t/\tau} + 1\right) + \tau \times \left(B/\tau\right) \times e^{-t/\tau}$
Soit : $B = E$ conduisant à : $u_C = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ où pour $t \to \infty$, on a : $u_C = E$
Compte tenu que :
$q = C\,u_C$, alors : $q = C\,E\,\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ où pour $t \to \infty$, on a : $q = C\,E$
$i = dq / dt$, alors : $i = (E / R)\,e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $i = 0$

• **Propriété n°9**
L'équation différentielle de la tension u_C aux bornes d'un condensateur lors de la décharge de ce condensateur à travers une résistance R en réponse à un échelon de tension s'établit comme suit :
$0 = u_C + u_R$ (application de la loi d'additivité des tensions).
Soit l'équation différentielle de la tension u_C lors de la décharge : $0 = u_C + [\tau \times (du_C / dt)]$
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :
$u_C = A\,e^{-t/\tau} + B$ où A et B sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales : $u_C(0) = E$
Soit : $0 = E - (A / \tau) \times \tau$. Conduisant à : $A = E$
D'où : $u_C(0) = E + B = E$. Soit : $B = 0$
Alors : $u_C = E\,e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $u_C = 0$
Compte tenu que :
$q = C\,u_C$, alors : $q = C\,E\,e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $q = 0$
$i = dq / dt$, alors : $i = -\left(E/R\right)e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $i = -(E/R)$

• **Propriété n°10**
L'équation différentielle de l'intensité du courant traversant une bobine (L, r) d'un dipôle RL soumis à un échelon de tension s'établit lors de l'établissement du courant comme suit :
$E = u_R + u_L$ (application de la loi d'additivité des tensions).
Or : $u_R = R\,i$ (loi d'Ohm) et $u_L = r\,i + L\left(di / dt\right)$
Ce qui conduit à : $E = R_{TOTALE}\,i + L\left(di / dt\right)$ avec $R_{TOTALE} = r + R$
L'équation différentielle de l'intensité du courant lors de l'établissement du courant s'écrit :
$\left(E / R_{TOTALE}\right) = i + \left[\tau \times \left(di / dt\right)\right]$ avec $t = L / R_{TOTALE}$
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :
$i = A\,e^{-t/\tau} + B$ où A et B sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales :
$i(0) = 0$. Soit : $0 = A + B$. D'où : $A = -B$
Comme $\left(di / dt\right)_{t=0} = -A / \tau$, on en déduit : $E / R_{TOTALE} = \tau \times \left(B / \tau\right) = B$.

Soit : $i = (E / R_{TOTALE}) \times (1 - e^{-t/\tau})$ où pour $t \to \infty$, on a : $i = E / R_{TOTALE}$
Comme $u_L = r\,i + L\,(di / dt)$, on en déduit :
$u_L = (r\,E / R_{TOTALE}) \times (1 - e^{-t/\tau}) + (E\ e^{-t/\tau})$ où pour $t \to \infty$, on a : $u_L = (r\,E) / R_{TOTALE}$
Si la bobine a une résistance négligeable, lors de l'établissement du courant, u_L varie de : 0 à E.

• Propriété n°11
L'équation différentielle de l'intensité du courant traversant une bobine (L, r) d'un dipôle (RL) soumis à un échelon de tension s'établit lors de la suppression du courant comme suit :
$0 = u_R + [L \times (di / dt)]$
Soit : $0 = i + [\tau \times (di / dt)]$
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :
$i = A\,e^{-t/\tau} + B$ où A et B sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.
$i(0) = E / R_{TOTALE} = A + B$. D'où :
Comme $(di / dt)_{t=0} = -A / \tau$, on en déduit :
$0 = (E / R_{TOTALE}) - \tau \times (A / \tau) = A$. Soit : $A = E / R_{TOTALE}$
Pour $t = 0$, l'équation différentielle s'écrit : $E / R_{TOTALE} = E / R_{TOTALE} + B$
Soit : $B = 0$
D'où : $i = (E / R_{TOTALE})\,e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $i = 0$
Comme $u_L = r\,i + [L \times (di / dt)]$, on en déduit :
$u_L = (r\,E / R_{TOTALE})\,e^{-t/\tau} - E\,e^{-t/\tau}$ où pour $t \to \infty$, on a : $u_L = 0$
Si la bobine a une résistance négligeable, lors de la suppression de courant, u_L varie de E à 0.

• Propriété n°12
L'énergie emmagasinée par un condensateur est :
$E_C = (1/2) \times (C\,u^2)$.
Compte tenu de $q = C\,u$, on a : $E_C = (1/2) \times (q\,u)$ ou $E_C = (1/2) \times (q^2 / C)$
En effet, la puissance reçue par le condensateur est :
$P_C = u \times i = u \times C \times (du / dt)$.
Comme $P_C = dE_C / dt$, on en déduit : $E_C = [(1/2) \times (C\,u^2)] + k$
k est déterminée à partir des conditions initiales : $u(0) = 0$. Soit : $k = 0$ et $E_C = (1/2) \times (C\,u^2)$

• Propriété n°13
L'énergie emmagasinée par une bobine est :
$E_L = (1/2) \times (L\,i^2)$.
En effet, la puissance reçue par la bobine est :
$P = u \times i = (r\,i^2) + (L\,i) \times (di / dt)$.
Le terme $r\ i^2$ correspond à la puissance dissipée par effet Joule et ne contribue donc pas à l'énergie emmagasinée par la bobine.
Soit : $P_L = L \times (di / dt)$
Comme $P_L = dE_L / dt$, on en déduit : $E_L = [(1/2) \times L\,i^2] + k'$
K' est déterminée à partir des conditions initiales : $i(0) = 0$
Soit : $k' = 0$ et $E_L = (1/2) \times (L i^2)$

III - Méthodologie

• Méthodes pour déterminer la valeur de la constante de temps du dipôle RC

- première méthode : on connaît R et C. On calcule $\tau = RC$;

- deuxième méthode : lecture graphique ;

–> charge du condensateur : $u(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63\ E$
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe de charge $u = f(t)$ dont l'ordonnée est égale à $0{,}63\ E$, on obtient τ.
–> décharge du condensateur : $u(\tau) = E\ e^{-1} \approx 0{,}37\ E$.
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe de décharge $u = f(t)$ dont l'ordonnée est égale à $0{,}37\ E$, on obtient τ.

- troisième méthode : utilisation de la tangente à l'origine.

–> charge du condensateur : $\left(du / dt\right)_{t=0} = E / \tau$
La tangente à l'origine de la courbe $u = f(t)$ coupe l'asymptote $u = E$ au point d'abscisse $t = \tau$.
–> décharge du condensateur : $\left(du / dt\right)_{t=0} = -E / \tau$
La tangente à l'origine de la courbe de décharge $u = f(t)$ coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.

• Méthodes pour déterminer la constante de temps du dipôle RL

- première méthode : on connaît R, r et L. On calcule $\tau = L / (R + r)$;

- deuxième méthode : lecture graphique ;

–> établissement du courant :

$i(\tau) = \left(E / R_{TOTALE}\right) \times \left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63\left(E / R_{TOTALE}\right)$.
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe d'établissement du courant $i = f(t)$ dont l'ordonnée est égale à $0{,}63\ \left(E / R_{TOTALE}\right)$, on obtient τ.
–> suppression du courant : $i(\tau) = \left(E / R_{TOTALE}\right)\ e^{-1} \approx 0{,}37\ E / R_{TOTALE}$
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe de suppression du courant $i = f(t)$ dont l'ordonnée est égale à $0{,}37\ \left(E / R_{TOTALE}\right)$, on obtient τ.

- troisième méthode : utilisation de la tangente à l'origine.

–> établissement du courant : $\left(di / dt\right)_{t=0} = E / R_{TOTALE}$
La tangente à l'origine de la courbe d'établissement du courant $i = f(t)$ coupe l'asymptote $i = -E / R_{TOTALE}$ au point d'abscisse $t = \tau$.
–> suppression du courant : $\left(di / dt\right)_{t=0} = -E / R_{TOTALE}$
La tangente à l'origine de la courbe de suppression du courant $i = f(t)$ coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.

• Le produit RC est homogène à un temps

L'analyse dimensionnelle conduit à : $[\tau] = [R] \times [C]$
Or : $R = u / i$ et $C = q / u = (i \times t) / u$
D'où : $[R] = [U] / I$ et $[C] = (I \times T) / [U]$
Soit : $[R] \times [C] = T$: homogène à un temps.

• Le rapport L / R_{TOTALE} est homogène à un temps

L'analyse dimensionnelle conduit à : $[\tau] = [L] / \left[R_{TOTALE}\right]$
Or : $R_{TOTALE} = u / i$ et $u_L = L \times (di / dt)$
D'où : $\left[R_{TOTALE}\right] = [U] / I$ et $[U] = [L] \times I \times T^{-1}$ <=> $[L] = [U] / \left(I \times T^{-1}\right)$
Soit : $[L] / \left[R_{TOTALE}\right] = T$: homogène à un temps.