Trigonométrie : formules trigonométriques

1. Formules d'addition

Rappels:

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})$

Et si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

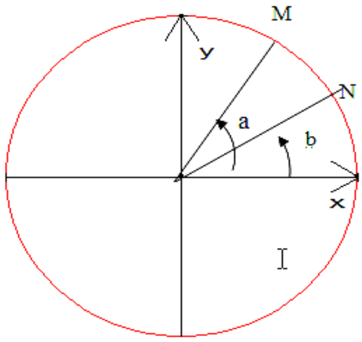
Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a$.

On a : M(cos a ; sin a) et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ ce qui s'écrit encore : $\overrightarrow{OM} = \cos a.\vec{i} + \sin a.\vec{j}$

Considérons alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{ON}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a$ *et* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = b$

Alors M (cos a ; sin a) et N (cos b ; sin b)

et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$



On a a – b = ($\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}$)

D'une part $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\overrightarrow{ON}\|\cos(a-b)$ (1)

D'autre part, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)

Comme $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$,(1) et (2) donnent cos (a — b) = cos a. cos b + sina . sin b

On a donc

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En remplaçant b par -b, on a :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos[a-(-b)]\\ &= \cos a\cos(-b) + \sin a \sin(-b)\end{aligned}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Puisque $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ on a :

$$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad (\text{car} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Calcul de tan(a+b)

On suppose que $\cos(a+b) \neq 0$ et $\cos a.\cos b \neq 0$. on a ;

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Comme $\cos a.\cos b \neq 0$, $\tan(a+b) = \dfrac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$

d'où $$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2. Formules de duplication

$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$, donc

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = \sin(a+a) = 2\sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ d'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ *et* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Alors $\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

Expression de cos2a et de sin2a en fonction de tan a

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\sin a \cos a}{1} = \frac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a}$$

En supposant que $\cos a \neq 0$, on a :

$$\sin 2a = \frac{\dfrac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$$

$$\sin 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

De même, $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Comme $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$ et si on pose $t = \tan\dfrac{a}{2}$, on a :

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Comme $\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$

d'où $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\tan a = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

Et comme $\tan^2 a = \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$,

$$1+\tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}+1 = \frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

3. Formules de transformation d'un produit en somme

On rappelle que :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad (1)\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad (2)\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a \qquad (3)\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a \qquad (4)
\end{aligned}$$

Par addition et par soustraction membre à membre,

$(1)+(2)$ donne $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

$(2)-(1)$ donne $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a\sin b$

$(3)+(4)$ donne $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$(3)-(4)$ donne $\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\sin b\cos a$

Ce qui donnent

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\sin b\cos a = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

4. Formules de transformation d'une somme en produit

Posons $p=a+b$ *et* $q=a-b$, On a $a=\dfrac{p+q}{2}$ *et* $b=\dfrac{p-q}{2}$

(1) et (2) s'ecrit $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$(2)-(1)$ $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$(3)+(4)$ $\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$(3)-(4)$ $\sin p-\sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$