Corrigé problème 2 Bacc série S 2023

Problème 2 (8 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on note par f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x)=e^{nx}.\ln(1+e^{-nx})$

Partie A

1) $D_f=]-\infty;+\infty[$

, . $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-nx}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-nx})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx}=0$

Alors on a une forme indéterminée.

Levons cette indétermination

$$f_n(x)=e^{nx}.\ln(1+e^{-nx})=e^{nx}.\ln(1+\frac{1}{e^{nx}})$$

$$f_n(x)=e^{nx}.\ln(\frac{e^{nx}+1}{e^{nx}})$$

$$f_n(x)=e^{nx}.[\ln(e^{nx}+1)-\ln(e^{nx})]$$

$$f_n(x)=e^{nx}.[\ln(e^{nx}+1)-nx]$$

Posons $X=e^{-nx}$. , $e^{nx}.\ln(1+e^{-nx})=\frac{\ln(1+e^{-nx})}{e^{-nx}}=\frac{\ln(1+X)}{X}$

Quand $x \longmapsto -\infty$, $X \longmapsto +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(1+X)}{X}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$$

$$f_n(x)=e^{nx}.\ln(1+e^{-nx})=\frac{\ln(1+e^{-nx})}{e^{-nx}}$$

On fait le même changement de variable que précédemment

Posons $X=e^{-nx}$. , $e^{nx}.\ln(1+e^{-nx})=\frac{\ln(1+e^{-nx})}{e^{-nx}}=\frac{\ln(1+X)}{X}$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

2. $g_n'(x)=\frac{-n}{(1+e^{nx})^2}$

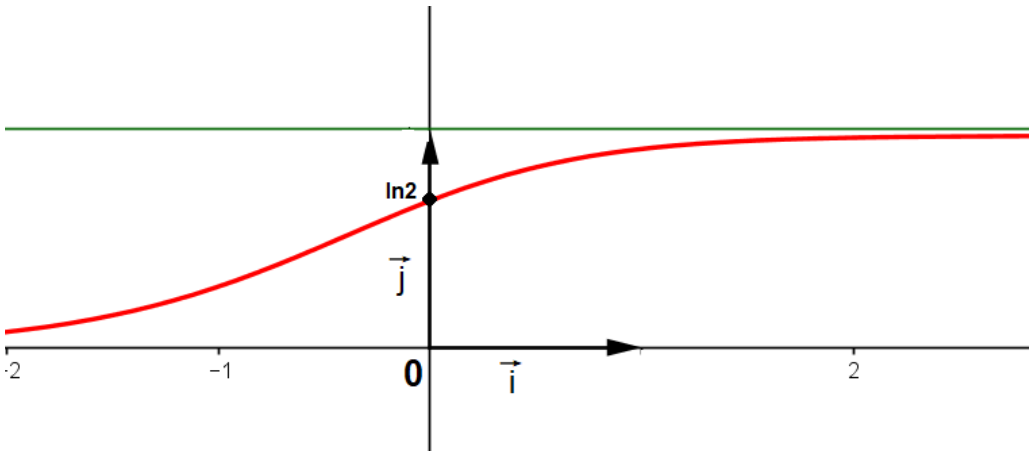
$g_n'(x)<0$ donc g_n est strictement décroissante.

a. $f_n'(x) = -n.e^{nx} g_n(x)$

b. Tableau de variation de f_n

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
$f_n(x)$	$0 \nearrow$	1

Courbe de f_n



5. Soit $A = \left(\int_0^1 f_2(x)dx\right) u.a$

Posons $U' = e^{2x}$ et $V = \ln(1+e^{-2x})$.

On a $U = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $V' = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Alors $A = \left(\left[\frac{1}{2}e^{2x}\ln(1+e^{-2x})\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{2x})\right]_0^1 \right)$ u.a

d'où A=3,36 u.a

Partie B

1. $f_2'(x)-2f_2(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$, donc f_2 est solution de (E).

2. Les solutions de l'équation différentielle y'=2y=0 sont les fonctions $y=A.e^{2x}$ avec $A\in\mathbb{R}$.

3. $(\varphi-f_2)'(x)-2(\varphi-f_2(x))=\varphi'(x)-2\varphi+\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

Donc

- si φ est solution de (E) alors $\varphi-f_2$ est solution de (E')
- si $\varphi-f_2$ est solution de (E') alors φ est solution de (E)

4. $\varphi-f_2$ est solution de (E'), donc $(\varphi-f_2)(x)=A.e^{-2x}+f_2(x)$

Ainsi $\varphi(x)=Ae^{2x}+e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$