CC BY SA

Séquence 3 : Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1. Équation à deux inconnues

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation de la forme ax+by=c où a, b et c sont des réels.

Résoudre dans IR² une telle équation, c'est chercher tous les couples (x ; y) vérifiant cette égalité.

Une telle équation admet une infinité de solutions.

Exemple : 2x - 3y = -1.

$(1;1)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ … sont des solutions de cette équation.

Deux équations sont dites équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

On obtient une équation équivalente à celle-ci en multipliant, en divisant ou en ajoutant les deux membres de l'inégalité par un même nombre non nul.

2. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

C'est un système de la forme $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Résoudre un tel système c'est chercher tous les couples (x ; y) vérifiant à la fois les deux équations.

Deux systèmes sont dits équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.

Méthodes de résolution :

Résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

2.1 Substitution

La méthode consiste à :

- Isoler une des inconnues dans l'une des équations, par exemple x (ce qui revient à exprimer x en fonction de l'autre inconnue y) dans la première équation ;
- Remplacer x par cette expression obtenue dans la deuxième équation ;
- On obtient alors une équation en y du premier degré que l'on peut résoudre facilement ;
- Remplacer y dans la première équation par sa valeur trouvée, puis résoudre cette équation en x.

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$.

De la première équation, on a : $x = \frac{y+3}{2}$.

En remplaçant x par cette valeur dans la deuxième équation, on a $\frac{y+3}{2} + 2y = -1$ ou, en mettant au même dénominateur, $\frac{y+3+4y}{2} = -1$. La résolution donne y = -1.

En remplaçant y dans la première équation, on trouve x = 1.L'ensemble des solutions est S = { (1 ; -1) }.

2.2 Combinaison linéaire

La méthode consiste à :

- Multiplier les deux membres de la première équation par un nombre k et les deux membres de la deuxième équation par un nombre k' de manière à obtenir le même coefficient de x dans les deux équations. On obtient un système équivalent au premier ;
- Faire la soustraction membre à membre des deux équations. On obtient une équation à une seule inconnue (ici y) que l'on peut résoudre sans difficulté ;
- Refaire les mêmes opérations avec les coefficients de y, et on obtient une équation avec une seule inconnue (ici x).

Remarque :

On peut ne pas faire la troisième étape, mais seulement prendre la valeur de x trouvée dans la deuxième étape et la rapporter dans l'autre équation.

Exemple : Résoudre le système : (S) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

On multiplie la deuxième équation par 2, on obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ équivalent à (S).

Par soustraction membre à membre, on a : 0.x + 7y = -7, ce qui donne y = -1.

De même, en multipliant la première équation par 2 et la deuxième par 3, on obtient le système $\begin{cases} 4x + 6y = -2 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$ équivalent à (S).

Par addition membre à membre, on a : 7 x + 0. y = 7, ce donne x = 1.La solution est S={ (1 ; -1) }.

3. Résolution graphique d’un système de deux inéquations

Exemple

Résoudre graphiquement

$$\begin{cases} 2x + y < 4 \\ -x + 3y > 12 \end{cases}$$

On détermine dans un repère orthonormé (O, I, J) l(ensemble des solutions de chaque inéquation .

1ère inéquation : $2x + y < 4$

On construit la droite (D):$2x + y – 4 = 0$

x	0	2
y	4	0

Le couple (0;0) est solution de ‘inéquation car 2x0 +0 -4 < 0 . On en déduit que le demi- plan contenant l’origine est l’ensemble des solutions de la 1ère inéquation.

2ème inéquation : $-x + 3y > 12$

On construit la droite (D):$-x + 3y – 12 = 0$

x	0	-12
y	4	0

Le couple (0;0) n’est pas solution de l‘inéquation car -1x0 + 3x0 -12 < 0 . On en déduit que le demi- plan ne contenant pas l’origine est l’ensemble des solutions de la 2ème inéquation.