Lycée Philibert TSIRANANA
&
Lycée MANGARIVOTRA

BACC BLANC

Année Scolaire : 2021-2022

Epreuve :
MATHEMATIQUES
Durée : 4h

Coefficient : 6

S

=*=

EXERCICE 1 : (3 points)

I) On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\ ;\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\ ;\quad P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ Q=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

1° a. Calculer $P.Q$ et B^2. (0,25x2)

b. En déduire la matrice inverse P^{-1} de P et la matrice puissance B^n ; $n \in \mathbb{N}^*$. (0,25x2)

2° a. Montrer que $A = P.B.P^{-1}$. (0,25)

b. En déduire par récurrence que $A^n = P.B^n.P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,25)

II) Un entier naturel N non nul s'écrit $\overline{xyz}$ en base 7 et $\overline{zyx}$ en base 9.

1° Montrer que $y = 24x - 40z$. (0,5)

2° En déduire que $y = 0$. (0,25)

3° Déterminer x et z . (0,5)

4° Ecrire N dans le système décimal. (0,25)

EXERCICE 2 : (2 points)

Dans un espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) définie par : $(D_1):\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=1+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ $\quad(D_2):\begin{cases}x=3+2m\\ y=m\\ z=-1-4m\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$

1° Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires. (0,5)

2° Soit (P) le plan passant par $A(1;1;1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1(1;-2;3)$ et $\vec{u}_2(2;1;-4)$.

a. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. (0,25)

b. Ecrire une équation cartésienne du plan (P). (0,5)

c. Vérifier que (D_1) est une droite du plan (P). (0,25)

d. Déterminer une droite (D) parallèle à (D_2) et sécante à (D_1). (0,5)

PROBLEME 1 : (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB tel que $OA = OB = a\,;a \succ 0$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

- Soit I le milieu de $[AB]$.
- On appelle R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,
- T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,
- et on pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

Partie A :

1° Faire la figure (Pour la construction, on prendra comme unité $a = 4cm$) (0,25)

2° Déterminer et construire le barycentre G du système des points pondérés suivant $\{(O;4);(A,-1);(B,-1)\}$ (0,5 – 0,25)

3° Déterminer et construire l'ensemble (E) des point M du plan défini par : $4MO^2 - MA^2 - MB^2 = 2a^2$ (0,75 – 0,25)

Partie B :

1° Préciser la nature de f et de g. (0,25x2)

2° a. Décomposer R et T en deux réflexions d'axes convenables. (0,5x2)

b. En déduire les éléments caractéristiques de f et g. (0,25x2)

3° a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f$. (0,25)

b. Chercher l'image de A par cette transformation et caractériser alors $g \circ f$. (0,5 – 0,25)

Partie C :

On choisit le repère complexe $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

1° Déterminer les affixes des points A, B, G et I. (0,25x4)

2° a. Donner l'expression complexe de R et T (0,25x2)

b. En déduire l'expression complexe de chacune des transformations f et g. (0,25x2)

PROBLEME 2 : **(8 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x & si\ x < 1 \\ f(x) = x - 1 + ln\,x & si\ x \geq 1 \end{cases}$. Notons $(\mathcal{C})$ sa courbe. Unité $1\,cm$

Partie A :

1° a. Calculer $f(1)$. (0,25)

b. Etudier la continuité de la fonction f est en 1. (0,5)

2° Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -e$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2$. Donner une interprétation géométrique de résultat. (0,25x3)

3° Calculer les limites de f aux bornes de Df. (0,25x2)

4° a. Pour $x < 1$. Calculer $f'(x)$. Etudier son signe. (0,5 – 0,25)

b. Pour $x \geq 1$. Calculer $f'(x)$. Etudier son signe. (0,5 – 0,25)

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (0,25)

5° Tracer $(\mathcal{C})$ et les demi-tangentes au point d'abscisse 1. (0,5 – 0,25 – 0,25)

Partie B :

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = (-2x+1)e^x$.

1° Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (-x^2 + x)e^x$ est solution de l'équation (E). (0,5)

2° Montrer que φ est une solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(\varphi - g)$ est une solution de l'équation $(E'): y' - y = 0$. (0,5)

3° a. Résoudre l'équation (E'). (0,5)

b. En déduire la solution de l'équation (E). (0,25)

Partie C :

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

a. Calculer I_0. (0,25)

b. A l'aide de l'intégration par partie, calculer I_1. (0,5)

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $I_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)I_n$. (0,5)

d. En déduire I_2. (0,25