LYCEE PHILIBERT TSIRANANA **Code : 401 010 020**	**Année Scolaire 2022-2023** **BAC BLANC**	**Epreuve de : MATHEMATIQUES** **Classe : TS** **Durée : 4h** **Coeff : 6**

::

Exercice 1 : (3points)

Partie I ARITHMETIQUE

1°) Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b $(a<b)$ tels que $PPCM(a;b)=m$ et $PGCD(a;b)=d$ qui vérifient $\begin{cases} m+d=126 \\ 5<d<10 \end{cases}$ (0,25 pt)

2°) Effectuer la division euclidienne de -532 par -71 (0,25pt)

3°) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, le nombre $A=3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17 :

a- Par récurrence (0,25pt)

b- Par congruence (0,25pt)

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x\equiv 1[3] \\ x\equiv 2[7] \end{cases}$ (0,5pt)

Partie II : PROBABILITE

On dispose un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une urne U contenant quatre boules numérotées 1, trois boules numérotées 2 et deux boules numérotées 3.

1°) On lance le dé et note ***a*** le numéro de la face supérieure. On tire au hasard et simultanément deux boules de U et on note ***b*** la somme des numéros de deux boules tirées.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le produit ***ab*** est égal à 8 » (0,25pt)

B : « La somme ***a + b*** est inférieure à 5 » (0,25pt)

C : « Le produit ***ab*** est un carré » (0,25pt)

2°) On tire simultanément trois boules de l'urne U . On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 3

Donner la loi de probabilité de X (0,5pt)

3°) On lance n fois de suite et d'une manière indépendante ce dé $(n\in\mathbb{N}^*)$.

On note A_n l'événement A_n : « ne jamais obtenir un numéro multiple de trois au cours ces n lancers » ; et on pose $p_n=p(A_n)$

Déterminer $p_n=p(A_n)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ (0,25pt)

Exercice 2 : (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(8;0;8)$ et $B(10;3;10)$ ainsi que la droite (D) d'équations paramétriques $(D):\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. a- Donner la représentation paramétrique de la droite (D') passant par A et B (0,5pt)

   b- Démontrer que (D) et (D') sont non coplanaire (0,5pt)

2. Le plan (P) est parallèle à (D) et contient (D').

   a- Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (P) (0,5pt)

   b- Déterminer une équation cartésienne de (P) (0,5pt)

Problème 1 : (7 points)

Dans le plan orienté ($\mathcal{P}$), on donne les points O, A, B, C, D et I tels que :

- $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- OAC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}$ et $OA = a$, $a > 0$.
- OAD est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}$ et $AD = 2OA$.

Partie A :

1° Faire la figure. (Prendre $a = 2cm$ et mettre horizontalement la droite (OA)) (0,5 pt)

2° On note R_O la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$; R_A la rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $R = R_O \circ R_A$

a. Montrer que R est une symétrie centrale. (0,25 pt)

b. Déterminer $R(A)$ et en déduire le centre de R. (0,5 pt)

c. Déterminer les droites (D_1) et (D_2) telles que $R_O = S_{(D_2)} \circ S_{(OA)}$ et $R_A = S_{(OA)} \circ S_{(D_1)}$ (0,5 pt)

Retrouver les questions précédentes a) et b). (0,25 pt)

3° Soit S la similitude directe plane de centre C qui transforme A en B.

a. Montrer que $BC = \sqrt{3}\,AB$ (0,5 pt)

b. Déterminer le rapport et l'angle de S. (0,5 pt)

4° Soit $\overline{S}$ la similitude indirecte de centre A qui transforme C en D.

a. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD})$ (0,5 pt)

b. Déterminer le rapport et l'axe (Δ) de $\overline{S}$. (0,5 pt)

Partie B :

Le plan ($\mathcal{P}$) est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

1° Donner les affixes des points A, B, C, D et I. (1,25 pts)

2° Déterminer la forme complexe et les éléments caractéristiques de la similitude directe S de centre C qui transforme A en B. (0,5 + 0,25 pt)

3° Déterminer la forme complexe et les éléments caractéristiques de la similitude indirecte $\overline{S}$ de centre A qui transforme C en D. (0,5 + 0,25 + 0,25)

Problème 2 : (8 points)

Soit f une fonction numérique définie sur ℝ par : $f(x) = \begin{cases} (x-1)ln(1-x) & si\ x < 0 \\ e^{\frac{x}{2}} - x - 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Partie A :

1. a. Montrer que la fonction f est continuité en $x_0 = 0$. (0,25pt)

   b. Etudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = 0$. (0,5pt)
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df. (0,5pt)
3. a. Pour $x < 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,5pt)

   b. Pour $x \geq 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,5pt)

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f. (0,25pt)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha \in [2; 3]$ (0,25pt)
5. a. Etudier les branches infinies de la courbe ($\mathcal{C}$). (0,5pt)

   b. Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et les demi-tangentes à l'origine du repère. (1pt)

Partie B :

On considère une fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=2ln(x+1)$

1. Etudier les variations de la fonction g . (0,5pt)
2. Montrer que α est une solution de l'équation $g(x)=x$. (0,25pt)
3. Montrer que pour tout $x\in[2;+\infty[$, alors $g(x)\in[2;+\infty[$. (0,25pt)
4. On définit une suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=g(U_n) \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$ (0,25pt)
   a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n\geq 2$ (0,25pt)
   b) Montrer que pour tout $x\in[2;+\infty[$, alors $|g'(x)|\leq\frac{2}{3}$. (0,25pt)
   c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{3}\left|U_n-\alpha\right|$. (0,25pt)
   d) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0,25pt)
   e) En déduire la $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. (0,25pt)

Partie C :

On considère l'équation différentielle $(E): y'-y=(-2x+1)e^x$. Soit h une solution de (E).

a. Montrer que toute fonction φ définie par : $\varphi(x)=e^{-x}.h(x)$ vérifie $\varphi'(x)=-2x+1$. (0,5pt)

b. Montrer que si f solution de $(E)\Leftrightarrow(f-h)$ solution de l'équation $(E'): y'-y=0$. (0,5pt)

c. Résoudre l'équation (E'). (0,25pt)

d. En déduire la solution de (E). (0,25pt)