Étude de quelques fonctions polynômes

1er exemple : $f(x)=x^2$

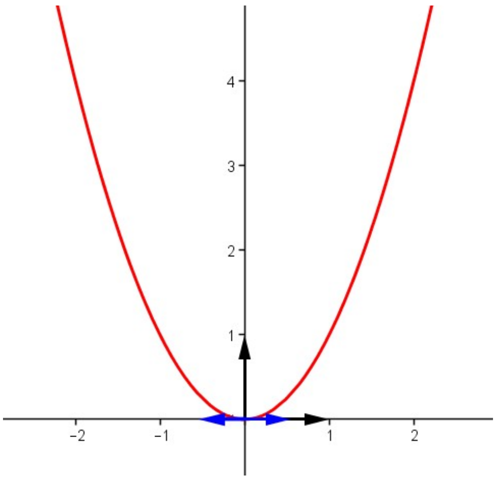
- $D_f=R=]-\infty;+\infty[$
- $Parité: f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$
  f est paire $D_e=[0;+\infty[$
- limites
  $\lim_{x\to 0} f(x)=0$
  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$
- Dérivée $f'(x)=2x$
- Tableau de variation :
  $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$
  $f(x)=x^2$

$f'(0)=0$, donc on a une tangente horizontale en (0,0)

x	0		$+\infty$
f '(x)	0	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

,

x	1	2
y	1	4



2e exemple : $f(x)=-x^3+3x+1$

- $D_f=R$
- Parité :
  $f(-x)=+x^3-3x+1$
  $-f(x)= +x^3-3x-1$
- Donc f n'est ni paire ni impaire

- Limites :
  $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$
  $f'(x)=-3x^2+3$

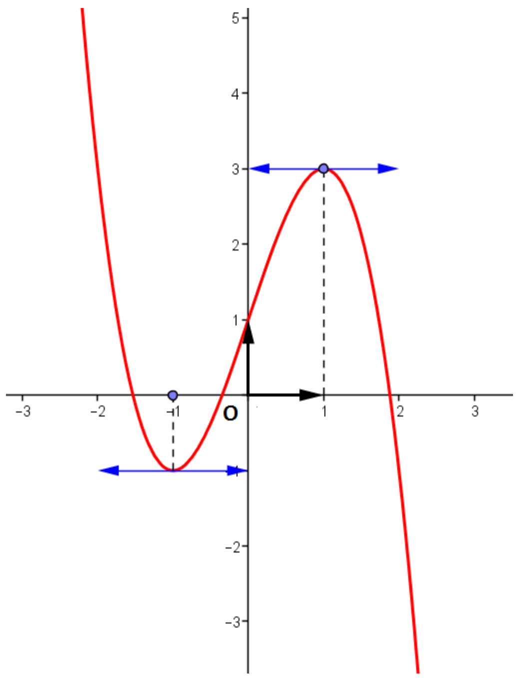
- Tableau de variation :

  $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \;\; ou \;\; x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

-2	-1	1	2
3	-1	3	-1

Courbe :



3e exemple : $f(x)=x^4-2x^2+1$

- $Df=R$
- Parité,

  $f(x)=x^4-2x^2+1$ donc f est paire

  $D_e=[0;+\infty[$
- *Limites*

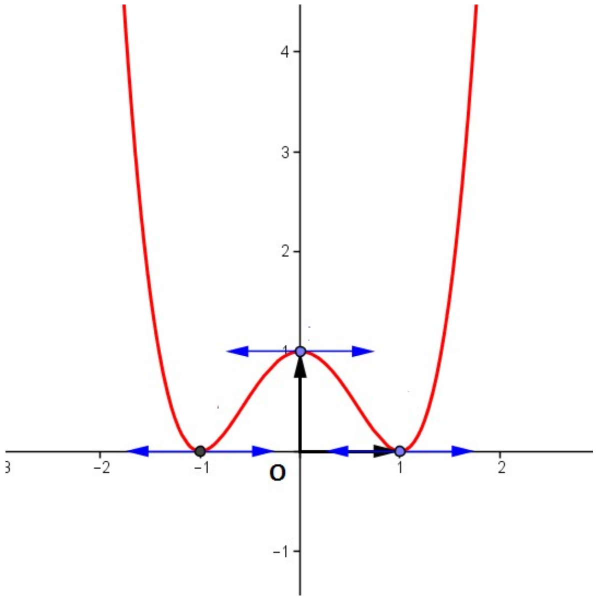
  $\lim_{x\to 0} f(x)=1 \;\; ; \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- *Dérivée*

  $f'(x)=4x^3-4x$

- *Tableau de variation :*
  $f'(x)=0$ si et seulement $4x(x^2-1)=0$ donc si $x=0$ *ou* $x=1$ *ou* $x=-1$

La courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1, et par symétrie, en -1

x	0		1		+∞
f '(x)	0	-	0	+	
f(x)	1	↘	0	↗	+∞



<u>4[e] exemple :</u> $f(x)=x^3+x$

- Etudier les variations de f
- Montrer que le point $M_0(0\,;0)$ est un point d'inflexion
- Donner la droite (T) tangente à la courbe représentative (ζ) de f en M_0
- Tracer dans un repère orthogonal $(0,\vec{i}\,;\vec{j})$ la courbe (ζ) et la droite (T)
- $Df=R$
- Parité : $f(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$
- f est donc impaire , $D_e=[0;+\infty[$
- Limites
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$
- $f'(x)=3x^2+1$

- Tableau de variation :
  $f'(x)$ ne peut pas être égal à 0

x	0		+∞
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	+∞

- $M_0(0\ ;0)$ est un point d'inflexion si f'' s'annule en x_0 et change de signe en x_0

f '' (x) = 6x, f''(x) = 0 si et seulement si x = 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ''	-	0	+

Donc M_0 est un point d'inflexion

- Equation de la tangente (T) en M_0 : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
  ou $(T)\ :\ y=x$

Courbe

-