# Comportement asymptotique

## Exercices

### Exercice 1 :

**Construire avec un tableau de variation**

Pour les exercices suivants, utiliser le tableau de variations pour trouver le domaine de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Construire ensuite une courbe correspondant au tableau.

1) Soit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

2) Soit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ |

3) Soit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $2$ |

4) Soit le tableau de variation suivant :

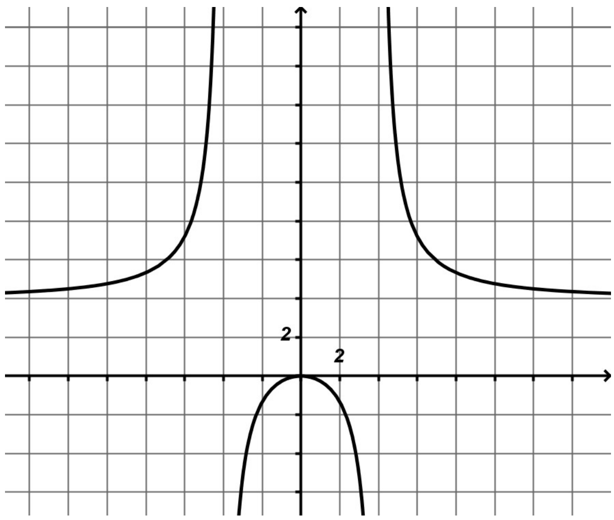
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $4$ |

## Exercice 11 :

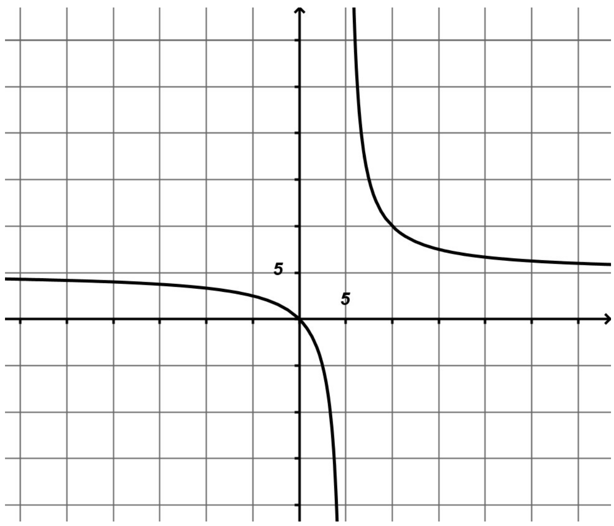
**Retrouver un tableau de variation**

Pour les courbe suivantes, composer le tableau de variation de la fonction $f$ représentée. Quelles asymptotes pouvez-vous conjecturer ? Pouvez vous donner l'expresssion d'une fonction qui correspondrait ?

1) Soit la courbe suivante :




2) Soit la courbe suivante :



## Exercice III :

**Théorème sur les limites**

Étudier les limites en $a$ de la fonction indiquée. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en $a$.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$ ; $a = 1$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x - 1}$ ; $a = \dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 6}$ ; $a = 2$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ ; $a = -1$

## Exercice IV :

**fonctions polynômes et rationnelles**

Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions $f$ suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 + 1$

2) $f(x) = -2x^2 + 3$

3) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

4) $f(x) = 2 - x - x^2$

5) $f(x) = -5x^3 + x - 2$

6) $f(x) = x^3 - 2x^2$

7) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 2}$

8) $f(x) = \dfrac{-3x + 12}{x - 1}$

9) $f(x) = \dfrac{6 - 2x}{x - 3}$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 + 12}{x^2 - 8}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 5}{3x^2 - 2x + 1}$

12) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

## Exercice V :

**Asymptote oblique**

Pour chacune des fonctions suivantes, la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ est-elle asymptote oblique à leur courbe représnstative ? Justifier votre réponse.

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x - 1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$h(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$k(x) = x + 1 + \frac{x}{x - 1}$$

## Exercice VI :

**Calcul de limites**

Pour les exercices suivants, étudier la limite de la fonction $f$ au point indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{(x - 1)(2x + 3)}{x^2 - 1}$ en 1.

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ en 2.

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - x}$ en 0.

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ en 1.

## Exercice VII :

**Étude de fonctions**

Étudier les fonctions suivantes. Dans le cas où $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $d$ ou oblique $\Delta$, déterminer les éventuels point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $d$, ou de $\mathscr{C}_f$ et de $\Delta$, puis étudier la positionde $\mathscr{C}_f$ et de $\Delta$.

Afficher sa courbe sur votre calculatrice pour contrôler vos résultats.

1) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2+1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)}$

## Exercice VIII :

**Recherche d'asymptote**

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x+2}$$

1) Déterminer $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

2) En déduire que la droite $\Delta$ d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta$ selon les valeurs de $x$.
4) Prouver que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale et donner une équation de cette asymptote.

## Exercice IX :

**Position d'une courbe et de son asymptote**

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$

1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Calculer la fonction dérivée puis dresser son tableau de variation
2) a) Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{(x-2)^2}$

   b) En déduire l'équation d'une asymptote oblique $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta$.

   c) Déterminer le point d'intersection de $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$.
3) Tracer $\mathscr{C}_f$
4) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de $m$, le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$2x^3 - (7+m)x^2 + (3+4m)x - 3 - 4m = 0$$

## Exercice X :

**Fonction très classique**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2x-2}$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) Montrer que l'on peut écrire $f$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x-1}$.

2) Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Étudier la limite en 1. Qu'en déduisez-vous ?

4) Déterminer la fonction dérivée $f'$. On cherchera à factoriser cette fonction dérivée.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

6) Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

   On précisera la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(D)$.

7) Soit $(T)$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2. Donner une équation de la droite $(T)$.

8) Montrer que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

9) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, les asymptotes, la tangente $(T)$ et le point de symétrie dans un repère orthonormal.