Séquence 2 : Dérivation de fonctions

1. Nombre dérivé

1.1 Rappel

f est une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition. Le taux de variation de f entre x et x_0 est :

$$t_f = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.2 Définition

f est une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition. Dire que f est **dérivable** en x_0 signifie que le taux de variation entre x et x_0 admet une limite finie en x_0.

Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée **nombre dérivé** de f en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en a réel et calculer f'(a).

Solution :

Utilisons la définition. Pour cela, formons le taux de variation entre x et a pour calculer sa limite quand x tend vers a.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$$

On a $\lim_{x \to a} x + a = 2a$. Ainsi, f est dérivable en tout point d'abscisse x = a et f'(a) = 2a.

1.3 Interprétation géométrique

Si (C) est la courbe de f, dérivable en x_0, alors la **tangente à (C) au point A(x_0 ; f(x_0))** est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

Pour l'illustration, voir les activités géogébra et flash.

L'équation de la tangente en A d'abscisse x_0 est :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. Fonction dérivée

2.1 Définition

f est une fonction définie sur D_f. D désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans D_f.

On dit que f est **dérivable** sur D si elle est dérivable en tout point de D.

La fonction qui, à tout x de D associe le nombre dérivé f'(x), est appelée la **fonction dérivée** de f.

On la note f'.

Exemple :

Nous venons de voir que si $f(x) = x^2$, pour tout réel a, f'(a) = 2a. La fonction dérivée de f est : f'(x) = 2x.

2.2 Tableau des dérivées des fonctions de référence

On peut démontrer avec la définition les formules suivantes :

f(x)	f est définie sur	f est dérivable sur	f'(x
$k,\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\ \cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\ \cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

L'ensemble des nombres réels où une fonction est dérivable est **l'ensemble de dérivabilité** de cette fonction.

Exemple :

$f(x) = x^5$, $f'(x) = 5\,x^{5-1}$ donc $f'(x) = 5\,x^4$. f est dérivable sur IR.

2.3 Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables sur D. Alors on a les formules suivantes :

- (u + v)' = u' + v'
- (k u)' = k u'
- (u . v)' = u' . v'
- $(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)$

2.4 Exemples

Calculer la dérivée f' de si :

1) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 2) $f(x)=-x^3$ 3) $f(x)=(x^2+3)\sqrt{x}$

4) $f(x)=(3x+2)^4$ 5) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

Solutions :

1) $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$

2) $f'(x)=-3x^2$

3) Posons $u(x)=x^2+3$ et $v(x)=\sqrt{x}$. Alors $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x)}}$.

$$f'(x)=u'v-uv'=2x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+3)=\frac{5x^2+3}{2\sqrt{x}}$$

4) $f(x)=(3x+2)^4$. Posons $u(x)=3x+2$, alors $u'(x)=3$.

$$f'(x)=3\times4\times(3x+2)^{4-1}=12(3x+2)^3$$

4) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$. Posons $u(x)=x+2$ et $v(x)=x-1$. Alors $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

$$f'(x)=\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$.