

Système linéaire de trois équations à trois inconnues

1. Définition

C'est un système du type

$$(S) \begin{cases} ax+by+cz = d & (L_1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (L_2) \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (L_3) \end{cases}$$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Gauss

2. Opérations élémentaires

- Deux *systèmes d'équations* (S) et (S') sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions, autrement dit, si toute solution de (S) est solution de (S') et réciproquement.

- On appelle *opérations élémentaires* sur les lignes de (S) :

- l'échange des lignes i et j notée $L_i \leftrightarrow L_j$
- la multiplication de la ligne i par un réel l (l'0) notée $L_i \rightarrow l L_i$
- l'addition à la ligne i d'un multiple de la ligne j notée $L_i \rightarrow L_i + l L_j$

3. Théorème

On obtient un système (S') équivalent à (S) :

- en effectuant une opération élémentaire sur les lignes de (S)
- en supprimant dans (S) deux lignes identiques
- en changeant l'ordre des inconnues de (S) i.e. en échangeant deux colonnes de (S).

4. Méthode de Gauss

Cette méthode consiste à transformer, par combinaisons linéaires, le système initial de façon à aboutir à un système simple à résoudre par substitutions.

Description de la méthode :

1^{ère} étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S') équivalent à (S), de la forme

$$\begin{cases} ax+by+cz = d & (L_1) \\ b'_1y+c'_1z = d'_1 & (L'_2) \\ b''_1y+c''_1z = d''_1 & (L'_3) \end{cases}$$

2^e étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz = d & (L_1) \\ b'_1y+c'_1z=d'_1 & (L'_2) \\ c''_2z=d''_2 & (L''_3) \end{cases} \text{ équivalent à (S')}$$

3^e étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''₃), puis on substitue dans (L''₂)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple :

Résoudre dans IRXIRXIR le système :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} (L_1) &\rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ 2y-z=1 & (L'_2) \\ 3y+2z=5 & (L'_3) \end{cases} \\ (L_1 - L_2) &\rightarrow \\ (L_1 - L_3) &\rightarrow \end{aligned}$$

$$(3L'_2 - 2L'_3) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ -7z=-7 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} z=1 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

d'où, l'ensemble de solution est $S = \{(1; 1; 1)\}$

Remarque :

Dans la deuxième étape, si on aboutit à une égalité de la forme $0.z=0$, on prend z comme paramètre en posant $z = k$, et on exprime les autres inconnues en fonction de ce paramètre. On a alors une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 & (L_1) \\ x+y-3z=2 & (L_2) \\ 2x-y-z=3 & (L_3) \end{cases}$$

Éliminons x dans les deux dernières équations avec (L₁). On obtient le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 & (L_1) \\ -3y+5z=-1 & (L'_2) \\ -3y+5z=-1 & (L'_3) \end{cases}$$

On voit que les deux équations obtenues sont égales, donc si on élimine y, on a

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 & (L_1) \\ -3y+5z=-1 & (L'_2) \\ 0.z=0 & (L''_3) \end{cases}$$

On pose $z = k$. D'après l'équation (L''₂) on a $y = \frac{1+5k}{3}$

et d'après l'équation (L_1) , $x = \frac{5+4k}{3}$

Et l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{5+4k}{3}, \frac{1+5k}{3}, k \right), k \in \mathbb{R} \right\}$.

Pour chaque valeur de k , on a une solution. Ainsi on a une infinité de solutions.

Si on aboutit à une équation de la forme $0.z = d''_3$, où $d''_3 \neq 0$, le système n'admet aucune solution.

Exemple :

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ x+y-3z=2(L_2) \\ 2x-y-z=1(L_3) \end{cases}$$

Éliminons x dans les équations (L_2) et (L_3) , on obtient le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ -3y+5z=-1(L'_2) \\ -3y+5z=3(L'_3) \end{cases}$$

En éliminant y dans la dernière équation avec (L'_2) , on a le système

$$\begin{cases} x-2y+2z=1(L_1) \\ -3y+5z=-1(L'_2) \\ 0.z=-4(L''_3) \end{cases} \text{ qui ne donne aucune solution}$$

D'où l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$