MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service du Baccalauréat

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENTGÉNÉRAL

SESSION 2023

C

Série	: Scientifique	Épreuve de :	**MATHÉMATIQUES**
Option	: C	Durée	: **4 heures**
Code matière	:009	Coefficient :	**5**

N.B : - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée
- L'exercices et les deux problèmes sont obligatoires

EXERCICE : (04 points)

I/ Arithmétique

1- a) En utilisant l'algorithme d'euclide, montrer que 56 et 15 sont premiers entre eux — 0,5pt

b) En déduire le couple (u,v) $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sachant que 56 u + 15 v = 1 — 0,5pt

2- a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $56x \equiv 2\ [15]$ — 0,5pt

b) Déterminer les coordonnées des points, d'abscisses naturels inférieures ou égales à 37 de la droite (D) d'équation : $56x - 12y - 2 = 0$ — 0,5pt

II/ Probabilité :

On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numerotés 1, 1 , 1, 1, 2, 3

1- Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro lors d'un lancer. — 0,5pt

2- On lance deux fois de suite ce dé, on note a le numéro apparu par le premier lancer et b pour le second. Soit (E) l'équation $x^2 + ax + b = 0$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer la probabilité de chaque évènement suivant
A : " (E) ait une racine double " — 0,5pt
B : " (E) ait pour racine -2 et -1" — 0,5pt

3- On lance n fois de suite et d'une manière indépendante ce dé
Déterminer la probabilité de l'événement
C : " avoir au moins une fois le numéro 1" — 0,5pt

PROBLEME 1 : (07 points)

I) Soit $(\mathcal{P})$ un plan orienté et soit ABCD un carré direct de coté a , $a > 0$ de centre E.
F est un point de $(\mathcal{P})$ tel que EBFC est un carré.

1- Déterminer les réels $\propto, \beta$ et δ tels que C est le barycentre du système $\{(A ; \propto), (B ; \beta), (D ; \delta)\}$ — 0,5pt

2- a) Déterminer et construire l'ensemble ($\mathcal{C}_a$) des points M tels que
$-MA^2 + MB^2 + MD^2 = \frac{a^2}{2}$ — 0,75 + 0,25pt

b) Vérifier que E $\in$ ($\mathcal{C}_a$) — 0,25pt

3- Soient r la rotation de centre E et d'angle π
S la symétrie orthogonale d'axe (FC)
f la transformation définie par f = roS

a) En décomposant r en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis
Montrer que $f = S_{(AC)} \circ t_{2\overrightarrow{CE}} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$ — 0,5+0,25+0,25pt

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f — 0,5pt

II) Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm. Soient A et B deux points de $(\mathcal{P})$ d'affixes respectives $-1-i$ et $2-2i$

1) Placer A et B — 0,25pt

2) a) Déterminer l'affixe du point D image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ — 0,75pt

b) Trouver l'affixe du point C barycentre du système $\{(A\ ;\ -1)\ ,(B\ ;\ 1)\ ,(D\ ;1)\}$ 0,5pt
c) Donner deux applications affines qui laissent invariant le carré ABCD 0,5pt
d) Quelle est l'affixe du point E milieu de [AC] ? 0,25pt

3) Soit g la transformation d'écriture complexe

$$g : z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

a) Déterminer l'écriture complexe de gog. 0,5pt
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g. 1pt

PROBLEME 2 : (09 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| - x + 2 & si\ x < 0 \\ (2-x)e^{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On note ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm.

Partie A

1) a- Montrer que f est continue en $x_0 = 0$ 0,5pt
b- Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter le résultat. 0,5+0,25pt
2) a- Etudier les variations de f 1pt
b- Dresser le tableau de variation de f 0,5pt
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto\, \in\,]-5\ ;\ -4[$ 0,5pt
4) Construire ($\mathscr{C}$) et les deux demi-tangentes en $x_0 = 0$ 1pt

Partie B :

Soit I_n l'intégrale définie par : pour tout $n \geq 1$

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n\, e^x\, dx$$

1) En utilisant l'intégration par parties. Calculer I_1. Interpréter le résultat. 0,5+0,25pt
2) Pour tout $n \geq 1$, montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$ 0,75pt
3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$; $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$ 0,5pt
4) Montrer, en utilisant le raisonnement par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$$ 0,5pt

5) Soit (U_n) une suite définie par $U_n = \frac{2^n}{n!}$; $n \geq 1$
a) En exprimant $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ en fonction de n, montrer que pour $n \geq 3$, $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$ 1pt
b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $0 \leq U_n \leq (\frac{1}{2})^{n-3}U_3$ 0,5pt
c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ en utilisant la deuxième question. 0,25+0,25pt
d) Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$ 0,25pt