GENERALITES SUR LES ENSEMBLES

1. Ensemble - Élément

Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E

Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$, sinon $a \notin E$.

Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit E = F, s'ils possèdent les mêmes éléments.

2. Cardinal d'un ensemble fini

On dit que E est un ensemble fini si on peut compter ses éléments. Le cardinal de E noté card E désigne son nombre d'élément.

Exemples

E = { 1, 2, a, b}, card E = 4

E est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égal à 6. card E = 7

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui n'a aucun élément. Card $\emptyset$ = 0 ;

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

3. Partie d'un ensemble : Inclusion

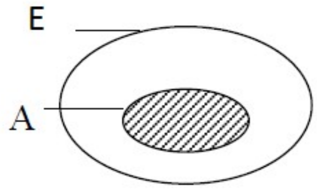
3.1 Définition

Soit A et E deux ensembles

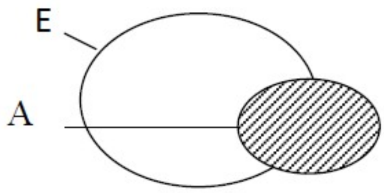
On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E.

On écrit $A \subset E$

$A \subset E$



$A \not\subset E$



Si $A \subset E$, alors $card\ A \leq card\ E$

3.2 Ensemble des parties :

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté : P(E)

P(E) = { A / $A \subset E$ }

on a card P(E) = 2 $^{\text{card E}}$

4. Complémentaire d'une partie

Soient A et E deux ensembles L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté $\overline{A}$

On a : card $\overline{A}$ = card E – card A

Exemple

E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } et A les nombre pairs de E. $\overline{A}$ = { 1, 3, 5 }.

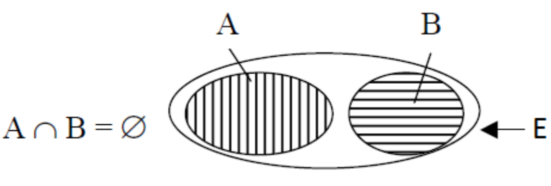
5. Réunion et intersection de deux ensembles

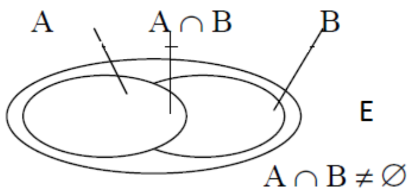
Soient A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

$$A \cup B = \{ x,\ x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$.

$$A \cap B = \{ x,\ x \in A \text{ et } x \in B \}$$





On a : card $A \cup B$ = Card A + card B – card $A \cap B$

et si $A \cap B$ = $\emptyset$; card $A \cup B$ = Card A + card B

6. Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et A_1 ,A_2, …A_n des parties de E

{ A_1 ,A_2, …A_n } est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si pour tout x élément de E, il existe un et un seul A_i tel que $x \in A_i$

{ A_1 ,A_2, …A_n } est une partition de E si

(1) $A_i \neq \emptyset$ pour tout i,

$A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$,

on a card E = card A_1 + card A_2,+ …+ card A

7. Ensemble produit

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et . $x \in B$ On le note : A X B .A X B = { (x ; y), $x \in A$ et $x \in B$ }

on a card A X B = card A. card B

Si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $B = \{y_1, \ldots, y_p\}$.

on peut alors représenter tous les éléments de A X B sous formes de tableau à n lignes et p colonnes

(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	$\cdots$	(x_1, y_p)
(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	$\cdots$	(x_2, y_p)
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	$\cdots$	(x_n, y_p)

Généralisation :

$A_1 \times A_2 \times \quad \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / \ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, \text{et } x_n \in A_n\}$

Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples, ou n-listes

si $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, A_1 X A_2 X… X A_n = A X A X...X A = A^n.