

# Équations - Inéquations : série n°1

## Exercice 1

1°) Faire les transformations nécessaires puis résoudre les équations suivantes :

$$x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$4x^4 + 5x^2 - 6 = 0$$

$$2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$$

$$4x^4 - 3x^2 = 0$$

$$2x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

2°) Factoriser les polynômes ci-dessus puis étudier leurs signes

3°) Faire les transformations nécessaires puis résoudre les équations suivantes :

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$2x - (2 + \sqrt{2})\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$$

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0$$

$$2x^2 - 7|x| - 4 = 0$$

## Exercice 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x-2} + \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11-x}{x^2-4}$$

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{2}{x^2-x}$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{x+1}{x-1}$$

## Exercice 3

On se propose de résoudre l'équation (E) :  $2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$

1°) Vérifier qu'elle est équivalente à l'équation : (E') :  $2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

2°) En posant  $y = x + \frac{1}{x}$ , trouver les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$ay^2 + by + c = 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \text{ pour tout } x \neq 0$$

3°) Résoudre l'équation d'inconnue  $y$  :  $ay^2 + by + c = 0$

4°) En déduire les solutions de (E)

5°) Résoudre l'équation  $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0$

(C'est aussi de la forme  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ )

### Exercice 4

Pour un trinôme du 2nd degré  $T(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), on note respectivement  $S$  et  $P$  la somme et le produit de ses racines éventuelles

- 1°) Rappeler les expressions de  $S$  et  $P$
- 2°) Montrer que l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  est équivalente à  $x^2 - Sx + P = 0$
- 3°) Peut-t-on trouver les racines d'un trinôme si on connaît  $S$  et  $P$ . Comment ?
- 4°) Application 1 :
  - a) Trouver un trinôme du 2nd degré dont la somme de ses racines est 5 et le produit de ses racines est 6
  - b) Quelles sont ces racines ?
- 5°) Application 2 :  
Résoudre les systèmes d'équations à deux inconnues suivants :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

### Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} (2x^2 - 3x - 2)(x^2 - 5x + 6) \leq 0 & \quad \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \leq 0 & \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x - 2} \leq 0 \\ \frac{4x^3 - 3x + 1}{4x^4 + 3x^2 - 1} \geq 0 & \quad \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + (\sqrt{3} - 1)x^2 - \sqrt{3}} > 0 & \quad \frac{(x^4 + 3)(2x - 1)}{x^5 - x^4 - x + 1} > 0 \end{aligned}$$

### Exercice 7

- 1°) Résoudre les équations et inéquations suivantes puis vérifier les résultats trouvés :
  - a)  $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$
  - b)  $\sqrt{x+3} = x+1$
  - c)  $\sqrt{2x+3} \leq x$
- 2°) On considère l'équation  $(E) : \sqrt{A(x)} = B(x)$  et l'inéquation  $(I) : \sqrt{A(x)} \leq B(x)$ 
  - a) Sous quelles conditions  $(E)$  est-t-elle vérifiée ?
  - b) Sous quelles conditions  $(I)$  est-t-elle vérifiée ?
- 3°) Applications :  
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= 3x-4 & \sqrt{x-1} &\leq -x+3 & \sqrt{-x^2+2x+3} &= 4-2x \\ \sqrt{-x^2+2x+3} &\leq 4-2x & \sqrt{x^2+2x+2} &= 2x+1 & \sqrt{3x^2-2x-1} &= x-1 \\ \sqrt{3x^2-2x-1} &< x-1 & \sqrt{x+1} &< x-1 & \sqrt{-4x^2+x+5} &< 2x+2 \\ \sqrt{-x^2+14x+32} &\leq -x+16 & \sqrt{-x^2-x+20} &< 4-x & \sqrt{-x^2+7x-12} &\leq 3-x \end{aligned}$$