

# Limite d'une fonction

## 1. Limite en un point :

Soit  $I$  un intervalle,  $x_0 \in I$ ,  $f$  une fonction définie sur  $I$  sauf peut être en  $x_0$  et  $l \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  admet  $l$  comme limite en  $x_0$ , ou que  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ , si, lorsque  $x$  prend des valeurs très proches de  $x_0$ , les nombres  $f(x)$  deviennent très proches de  $l$  (ils finissent par appartenir à l'intervalle  $]l-\alpha; l+\alpha[$ , aussi petit que soit le réel positif  $\alpha$ )

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$

On dit que la limite de  $f$  en  $x_0$  est  $+\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$  si lorsqu'on donne à  $x$  des valeurs de plus en plus proches de  $x_0$ ,  $f(x)$  prend des valeurs indéfiniment grandes. ( $f(x)$  peut être plus grand que n'importe quel nombre  $M$ , aussi grand soit-il, pourvu que  $x$  soit assez proche de  $x_0$ )

Exemple :  $f(x) = \frac{1}{|x|}$

$x$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-10}$	$10^{-100}$
$f(x)$	10	100	$10^{10}$	$10^{100}$

Quand  $x$  prend des valeurs très proches de 0,  $f(x)$  devient indéfiniment grande donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

On dit que la limite de  $f$  en  $x_0$  est  $-\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = +\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

## 2. Limite à l'infini :

On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  si lorsqu'on donne à  $x$  des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  devient très proche de  $l$ .

On écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Exemple :  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On dit que  $f$  est pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  devient indéfiniment grand

On écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = +\infty$

### 3. Fonctions de référence :

- $f(x) = x$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$  quel que soit le réel  $x_0$ .
- $f(x) = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  quel que soit le réel  $x_0$ .
- $f(x) = \frac{1}{x}$   
 $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

### 4. Limite à gauche – limite à droite :

Soit une fonction définie sur  $]x_0, x_0 + \alpha[$  ( $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ) ; on dit que  $l$  est la limite de  $f$  à droite en  $x_0$  si  $l$  est la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures, c'est-à-dire quand  $x$  tend vers  $x_0$  et  $x > x_0$ .

On écrit  $l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Si  $f$  est définie sur  $]x_0 - \alpha; x_0[$ , on dit que  $l$  est la limite de  $f$  à gauche de  $x_0$  si  $l$  est la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures, c'est-à-dire quand  $x$  tend vers  $x_0$  et  $x < x_0$ .

On écrit  $l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Exemple :  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

### 5. Opérations sur les limites

- Limite d'une somme :**

<u>lim f</u>	<u>lim g</u>	<u>lim (f+g)</u>
	'	+ '
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
	$\infty$	$\infty$

• **Limite d'un produit :**

<u>lim f</u>	<u>lim g</u>	<u>lim (f.g)</u>
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	$\infty$	$\infty$
0	$\infty$	Forme indéterminée

• **Limite d'un quotient :**

<u>lim f</u>	<u>lim g</u>	<u>lim (f/g)</u>
l	$l' \neq 0$	$l/l'$
$\infty$	$\infty$	Forme indéterminée
l	$\infty$	0
0	0	Forme indéterminée
$l > 0$	$0^+$	$+\infty$
$l > 0$	$0^-$	$-\infty$
$\infty$	0	$\infty$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2+1}{x} \right) = \frac{1^2+1}{1} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + x \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x+1}{x^2-x-2} \right) = -\infty$

Remarque

Lorsque la limite d'une fonction est de la forme  $\frac{l}{0}$  où  $l \neq 0$ , alors le résultat est  $\infty$ . Pour savoir si c'est  $+\infty$  ou  $-\infty$ , on étudie le signe du dénominateur.

Exemple :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x}{x-1} \right) = -\infty$