Généralités sur les fonctions numériques

1. Vocabulaire

1.1 Définition

Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre x appartenant à un ensemble D un nombre y . On note y = f(x).

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par f

Exemple

$f(x) = x^2 - 2x - 15$

L'image de 7 par f est $f(7) = 7^2 - 2\times7 - 15 = 49 - 14 - 15 = 20$.

0 a deux antécédents : – 3 et 5 car f(–3) = f(5) = 0.

2 est un antécédent de –15.

1.2 Ensemble de définition

1.2.1 Définition

Pour une fonction f(x) donnée, on appelle ensemble de définition l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer cette expression.

1.2.2 Méthodes

Soient P et Q deux polynômes

Si $f(x) = P(x);\ D = IR$

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)};\ D = \{x \in R / Q(x) \neq 0\}$

Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}};\ D = \left\{x \in R / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}};\ D = \{x \in R / P(x) \geq 0 ,\ Q(x) > 0\}$

Si $f(x) = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)};\quad D = \{x \in R / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \geq 0\}$

1.2.3 Exemples

(1) Soit f(x) = $\dfrac{2x+7}{3x-4}$ .f est définie si 3x-4 ≠ 0 . Df = IR\ { $\dfrac{4}{3}$ } =] - ∞ ; $\dfrac{4}{3}$ [U] $\dfrac{4}{3}$; +∞ [.

On dit aussi que $\dfrac{4}{3}$ est une valeur interdite ;

(2) g(x) = $\sqrt{(-3x+6)}$

On doit avoir -3x+6 ≥ 0 soit x ≤ 0, alors Dg =] - ∞;2].

1.2.4 Remarques :

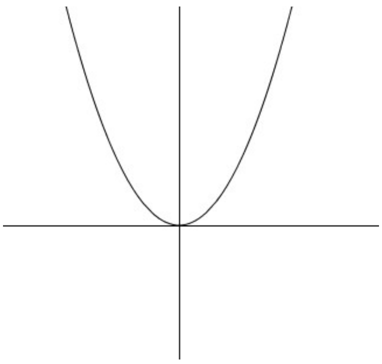
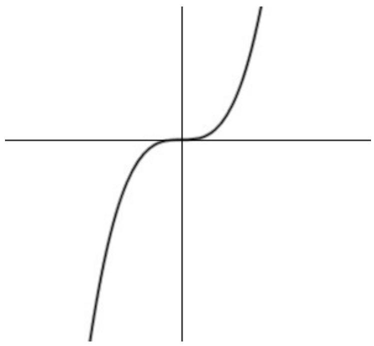
- Un réel de l'ensemble de définition a toujours une et une seule image.
- Un réel peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

2. Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions. On définit les fonctions $f+g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$; et fog par :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $fog(x) = f[g(x)]$

3. Parité

	f est une fonction paire	f est une fonction impaire
Définition	- D_f est symétrique par rapport à O - pour tout x de D_f, f(-x) = f(x)	- D_f est symétrique par rapport à O - pour tout x de D_f, f(-x) = - f(x)
Exemple	 $f(x) = x^2$	 $f(x) = x^3$
Interprétation graphique	Dans un repère orthonormé, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	Dans un repère orthonormé, la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

4. Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

4.1 Définition

Un repère étant choisi, on appelle représentation graphique d'une fonction f l'ensemble des points M de coordonnées (x ; f(x)) lorsque x prend toutes les valeurs de Df . On dit que la courbe de f a pour équation y = f(x).

4.2 Méthode

Pour tracer la courbe de f, on peut calculer des images en nombre suffisant, à l'aide de la calculatrice et on présente les résultats dans un tableau de valeurs

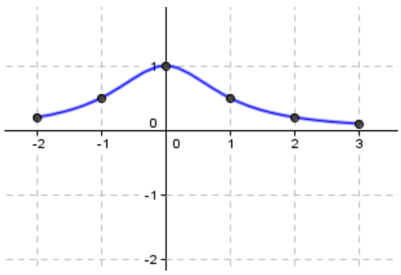
Exemple

Tracer la représentation graphique de la fonction f, définie par f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ dans [-2 : 3]

On a le tableau des valeurs suivants :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1

On obtient la courbe suivante



5. Variations d'une fonction

5.1 Fonctions croissantes

On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$ (respectivement f(x) < f(x')).

Exemple

la fonction définie par f(x) = x² est croissante sur [0 ; + ∞ [et décroissante sur] - ∞ ; 0]

5.2 Fonction décroissante

f est dite décroissante sur I si et seulement quels que soient x et x' de I tels que x < x' , on a $f(x) \geq f(x')$.

f est dite décroissante sur I si et seulement quels que soient x et x' de I tels que x < x' , on a f(x) > f(x').

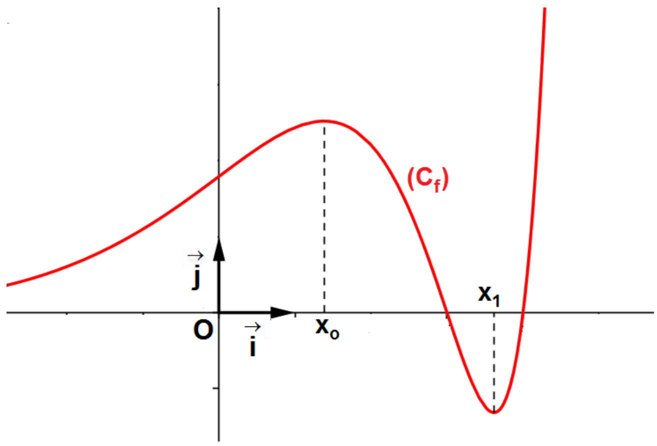
Exemple

la fonction définie par f(x) = x² est décroissante sur] - ∞ ; 0]

6. Extremum local (ou extremum relatif) :

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que :

- f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$.



On a un minimum local en x_0 et un maximum local en x_1